LJP : TE 23 Etude de Fonction (solutions)

Lycée Jean-Piaget ESCN
Mathématiques
Nom : ....
Prénom : ....

Corrigé

3M12
TE n. 2

tot. /54

Rédigez ce travail au stylo. *La calculatrice* ***est*** *autorisée. Les détails de vos calculs sont* ***exigés****.*
Une réponse qui ne les fournit pas, aussi correcte soit-elle, ne sera pas prise en considération.

Exercice 1 (6 points)
Soit f une fonction d'équation : $y = f(x) = 2e^x + \ln(x)$.

Déterminez :

1. La pente (valeur exacte) de la droite t tangente au graphe de f en son point T d'abscisse 1 ;
2. Une équation de la droite t.

$D_f =]0;\infty[$

1. $f'(x) = 2e^x + \frac{1}{x}$

$m = f'(1) = 2e+1$

$T(1; f(1))$

$f(1) = 2e + \ln(1) = 2e$

2. $t: y - 2e = (2e+1)(x-1)$

Exercice 2 (6 points)
Calculez la valeur réelle de k de manière que la fonction d'équation : $y = f(x) = (1 + kx^2) \cdot \ln(x)$ ait un point à tangente horizontale en $x_0 = 1$.

$D_f =]0;\infty[$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = (2kx)\ln(x) + (1+kx^2) \cdot \frac{1}{x}$

il faut que : $f'(1) = 0 \Rightarrow 2k \cdot 0 + (1+k) = 0$

$K = -1$

Exercice 3 (19 points)

Complétez ce tableau. Indiquez sur cette page les détails des calculs :

Fonction	Dérivée de la fonction (version réduite et, si possible, factorisée)	
$f_1(x) = e^x + 3x - 25$	$e^x + 3$	1
$f_2(x) = e^{4x^3-6x^2+9}$	$e^{4x^3-6x^2+9}\,(12x^2-12x)$	2
$f_3(x) = e^{-x} - x^4 - 3^x$	$-e^{-x} - 4x^3 - 3^x \ln(3)$	3
$f_4(x) = \ln(x - 3x^2)$	$\frac{1}{x-3x^2} \cdot (1-6x) = \frac{1-6x}{x-3x^2}$	2
$f_5(x) = \frac{x^4}{e^x}$	$\frac{4x^3 \cdot e^x - x^4 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{(4-x)x^3}{e^x}$	3
$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{2x-1}$	$\frac{\frac{1}{x}\cdot(2x-1) - \ln(x)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{(2x-1) - 2x\ln(x)}{x(2x-1)^2}$	3
$f_7(x) = (\log_3(x))^4$	$4(\log_3(x))^3 \frac{1}{x} \log_3(e)$	2
$f_8(x) = \ln(\ln(\ln x))$	$\frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))}$	3

Exercice 4 (13 points)

Calculez la valeur des limites suivantes (le signe du résultat doit être indiqué).

Lorsqu'il y a une forme indéterminée, indiquez-la et, le cas échéant, cochez la case : CLP, CEP, CLE.

	Limite	CEP	CLP	CLE	
1	$\lim\limits_{x\to+\infty}(10x - e^x) = \underset{FI}{[+\infty - \infty]} = -\infty$	✓			2
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left((1-x)^{100}\left(\frac{3}{23}\right)^x\right) = \underset{FI}{[+\infty \cdot 0^+]} = 0^+$	✓			3
3	$\lim\limits_{x\to 4^+}(\log(x-4) + x^2) = [-\infty + 16] = -\infty$				2
4	$\lim\limits_{x\to-\infty}(6^x \log_2(2-x)) = \underset{FI}{[0^+ \cdot (+\infty)]} = 0^+$			✓	3
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{20 + \ln(200 + x^{20})}{0{,}2x} = \left[\frac{20+\infty}{+\infty}\right] = \underset{FI}{\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]} = 0^+$		✓		3

Exercice 5 (10 points)

Soit f la fonction d'équation : $y = f(x) = (x^2 + 3x + 1)\, e^{(x+3)}$.

Dressez son tableau des signes et son tableau de croissance.
Calculez les coordonnées de ses éventuels points de maximum et de minimum.

TSIGNES :

x		x_1		x_2	
x^2+3x+1	+	0	−	0	+
e^{x+3}	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	+

$x^2+3x+1 \geq 0$; $\Delta = 9-4 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} = x_1$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} = x_2$

$e^{x+3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x+3)\, e^{x+3} + (x^2+3x+1)\, e^{x+3} = e^{x+3}(x^2+5x+4)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+5x+4 = 0 \;<\; x_3 = -4 \;;\; x_4 = -1$

T. CROISS

x		-4		-1	
x^2+5x+4	+	0	−	0	+
e^{x+3}	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	↗	Max	↘	Min	↗

$Max(-4 ; 5e^{-1})$

$Min(-1 ; -e^2)$

EXERCICE BONUS (4 points)

Déterminez le domaine de la fonction d'équation : $y = f(x) = \frac{1+\log(x+1)}{3^{x^2}-81}$.

$\begin{cases} 3^{x^2} - 81 \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{x^2} \neq 81 \\ x > -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 \neq 4 \\ x > -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > -1 \end{cases}$ $\quad D_f =]-1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$