LJP : TE 11 : Etude de fonction

Lycée Jean-Piaget
Mathématiques
Nom : .....
Prénom :

3M5
TE n. 2

tot. /46

Rédigez ce travail au stylo. *La calculatrice est autorisée. Les détails de vos calculs sont* ***exigés****.*
Une réponse qui ne les fournit pas, aussi correcte soit-elle, ne sera pas prise en considération.

Exercice 1 (20 points)
Calculez la dérivée des fonctions suivantes ; écrivez le résultat sous la forme réduite et, si possible, factorisée :

1) $f_1(x) = e^x + 5^x - 3x$ $f'(x) = e^x + 5^x \ln x - 3$

2) $f_2(x) = e^x \cdot (2x^3 - 7)$ $f'(x) = e^x(2x^3-7) + e^x(6x^2) =$
$= e^x(2x^3+6x^2-7)$

3) $f_3(x) = 3\ln(x^4 + 2x - 20) - \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{3\cdot(4x^3+2)}{x^4+2x-20} + \frac{1}{x^2} =$
$= \frac{(12x^3+6)x^2 + x^4+2x-20}{x^2(x^4+2x-20)} = \frac{12x^5+x^4+6x^2+2x-20}{x^2(x^4+2x-20)}$

4) $f_4(x) = e^{\sqrt{\sin(4x)}} - 2^4$ $f'(x) = e^{\sqrt{\sin(4x)}} \cdot \frac{\cos(4x)\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{\sin(4x)}} = \frac{2\cos(4x)}{\sqrt{\sin(4x)}} \cdot e^{\sqrt{\sin(4x)}}$

5) $f_5(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1+e^{5x}}$ $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})\cdot(1+e^{5x}) - (e^x-e^{-x})5\cdot e^{5x}}{(1+e^{5x})^2} =$
$= \frac{e^x+e^{-x}+e^{6x}+e^{4x}-5e^{6x}+5e^{4x}}{(1+e^{5x})^2} = \frac{-4e^{6x}+6e^{4x}+e^x+e^{-x}}{(1+e^{5x})^2}$

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction d'équation $y = f(x) = e^x + 5lnx - e$.

1. Calculez la pente de la droite tangente à son graphe en son point d'abscisse 1.
2. Déterminez ensuite l'équation de cette droite tangente.

1. $f'(x) = e^x + \frac{5}{x}$

$f'(1) = e + 5 = m$

2. $f(1) = e + 5 \cdot \underbrace{\cancel{\ln}1}_{0} - e = e - e = 0$

$y = m \cdot x + h$

$\downarrow$

$0 = (e+5) \cdot 1 + h \Rightarrow h = -e - 5$

$t: \quad y = (e+5) \cdot x - e - 5$

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction d'équation : $y = f(x) = ke^{2x-1} + \ln(4x+3)\,;\, k \in \mathbb{R}$.

Calculez la **valeur exacte** de k afin que :

1. le point P(0 ;1) appartienne au graphe de f ;
2. le graphe de f présente un point à tangente horizontale en $H(1; y_H)$.

Attention : les deux situations ci-dessus sont l'une indépendante de l'autre.

1. $f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{2\cdot 0-1} + \ln(4\cdot 0+3) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ke^{-1} + \ln 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{e} = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow$

$k = e(1-\ln 3)$

2. PTH $\Rightarrow f'(x) = 0$

$f'(x) = 2ke^{2x-1} + \frac{4}{4x+3}$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2ke^{2\cdot 1-1} + \frac{4}{4\cdot 1+3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2ke + \frac{4}{7} = 0 \Leftrightarrow 2ke = -\frac{4}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{14e} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{7e}$

Exercice 4 (12 points)
Soit la fonction d'équation : $y = f(x) = x^2 ln x$

Déterminez-en :

1. le domaine ;
2. le tableau de signes ;
3. le tableau de croissance ;
4. les coordonnées de tous les éventuels points à tangente horizontale ;
5. le graphe (l'esquisser).

1. $x > 0 \Rightarrow D_f =]0, +\infty[$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ impossible

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
f	|	$-$	0	$+$	

3. $f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 2x \ln x + x \Leftrightarrow$

$f'(x) = x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ impossible

$2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$

	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f'	|	$-$	0	$+$	
f	|	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

4. PTH $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$

$f(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \cancel{\ln e^{-1/2}} = e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$

$\left(e^{-1/2} ; -\frac{1}{2e}\right)$

5.