

LJP : TE 11 : Etude de fonction

Lycée Jean-Piaget

Mathématiques

Nom :

Prénom :

3M5

TE n. 2

tot. /46

Rédigez ce travail au stylo. La calculatrice est autorisée. Les détails de vos calculs sont exigés.
 Une réponse qui ne les fournit pas, aussi correcte soit-elle, ne sera pas prise en considération.

Exercice 1 (20 points)

Calculez la dérivée des fonctions suivantes ; écrivez le résultat sous la forme réduite et, si possible, factorisée :

$$1) f_1(x) = e^x + 5^x - 3x \quad f'_1(x) = e^x + 5^x \ln 5 - 3$$

$$2) f_2(x) = e^x \cdot (2x^3 - 7) \quad f'_2(x) = e^x(2x^3 - 7) + e^x(6x^2) = e^x(2x^3 + 6x^2 - 7)$$

$$3) f_3(x) = 3 \ln(x^4 + 2x - 20) - \frac{1}{x^2} \quad f'_3(x) = \frac{3 \cdot (4x^3 + 2)}{x^4 + 2x - 20} + \frac{1}{x^2} = \frac{(12x^3 + 6)x^2 + x^4 + 2x - 20}{x^2(x^4 + 2x - 20)} = \frac{12x^5 + x^4 + 6x^2 + 2x - 20}{x^2(x^4 + 2x - 20)}$$

$$4) f_4(x) = e^{\sqrt{\sin(4x)}} - 2^4 \quad f'_4(x) = e^{\sqrt{\sin(4x)}} \cdot \frac{\cos(4x) \cdot 4}{2\sqrt{\sin(4x)}} = \frac{2\cos(4x)}{\sqrt{\sin(4x)}} \cdot e^{\sqrt{\sin(4x)}}$$

$$5) f_5(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1 + e^{5x}} \quad f'_5(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (1 + e^{5x}) - (e^x - e^{-x}) 5 \cdot e^{5x}}{(1 + e^{5x})^2} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{6x} + e^{4x} - 5e^{6x} + 5e^{4x}}{(1 + e^{5x})^2} = \frac{-4e^{6x} + 6e^{4x} + e^x + e^{-x}}{(1 + e^{5x})^2}$$

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction d'équation $y = f(x) = e^x + 5\ln x - e$.

1. Calculez la pente de la droite tangente à son graphe en son point d'abscisse 1.
2. Déterminez ensuite l'équation de cette droite tangente.

$$1. f'(x) = e^x + \frac{5}{x}$$

$$f'(1) = e + 5 = m.$$

$$2. f(1) = e + 5 \cdot \cancel{f(1)} - e = e - e = 0.$$

$$y = m \cdot x + h$$

↓

$$0 = (e+5) \cdot 1 + h \Rightarrow h = -e-5$$

$$\text{t: } y = (e+5) \cdot x - e - 5$$

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction d'équation : $y = f(x) = ke^{2x-1} + \ln(4x+3); k \in \mathbb{R}$.

Calculez la **valeur exacte** de k afin que :

1. le point $P(0;1)$ appartienne au graphe de f ;
2. le graphe de f présente un point à tangente horizontale en $H(1; y_H)$.

Attention : les deux situations ci-dessus sont l'une indépendante de l'autre.

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(0) &= 1 \Leftrightarrow ke^{2 \cdot 0 - 1} + \ln(4 \cdot 0 + 3) = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow ke^{-1} + \ln 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{e} = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow \\
 k &= e(1 - \ln 3)
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{PTH} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 2ke^{2x-1} + \frac{4}{4x+3}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2ke^{2 \cdot 1 - 1} + \frac{4}{4 \cdot 1 + 3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ke + \frac{4}{7} = 0 \Leftrightarrow 2ke = -\frac{4}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{14e} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{7e}$$

Exercice 4 (12 points)

Soit la fonction d'équation : $y = f(x) = x^2 \ln x$

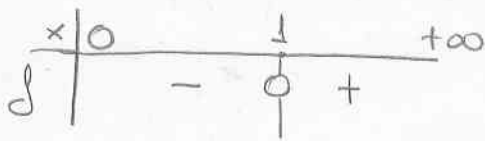
Déterminez-en :

1. le domaine ;
2. le tableau de signes ;
3. le tableau de croissance ;
4. les coordonnées de tous les éventuels points à tangente horizontale ;
5. le graphe (l'esquisser).

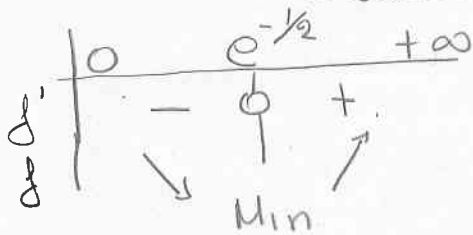
1. $x > 0 \Rightarrow D_f =]0, +\infty[$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ impossible

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$



3. $f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 2x \ln x + x$
 $f'(x) = x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ impossible
 $2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$



4. PTH $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$
 $f(e^{-1/2}) = (e^{-1/2})^2 \ln e^{-1/2} = e^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$
 $(e^{-1/2}; -\frac{1}{2e})$

