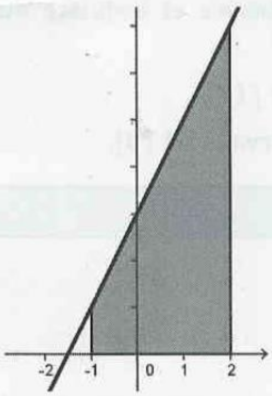
LJP Calcul Integral

3M-Série 2 **Mathématiques**
Calcul intégral

Exercice 1



Voici une représentation graphique de la fonction affine $f(x) = y = 2x + 3$:

1. À l'aide de la géométrie élémentaire, déterminer la surface de la zone grisée.
2. Trouver une primitive de $f(x)$.
3. Déterminer la surface de la zone grisée à l'aide du calcul intégral :

$$S = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2

Chercher une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x$	$f_2(x) = 4x$	$f_3(x) = x^2$
$f_4(x) = 5x^2$	$f_5(x) = x^3$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x^3$
$f_7(x) = x^5$	$f_8(x) = x^n$	$f_9(x) = \frac{1}{x}$
$f_{10}(x) = 2e^x$	$f_{11}(x) = e^{2x}$	$f_{12}(x) = \sqrt{x}$
$f_{13}(x) = x^{-2}$	$f_{14}(x) = \frac{1}{x^3}$	$f_{15}(x) = \frac{4}{x^5}$

Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = e^{x/2}(x^2 - 2x - 3)$$

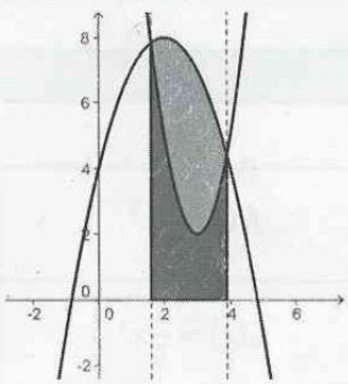
1. Étudier la fonction (zéros, comportement asymptotique, croissance et esquisse du graphe).
2. Vérifier que $\mathrm{F}(x) = 2e^{x/2}(x^2 - 6x + 9)$ est bien une primitive de $f(x)$.
3. Calculer l'aire comprise entre $\mathrm{f}(x)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle [-1 ; 3].

Exercice 4

Trouver $G(x)$, une primitive de $g(x) = 5 - e^x$, vérifiant

$$G(-1) = -\frac{1}{e} \ .$$

Exercice 5



Voici une représentation graphique des paraboles d'équations

$$p_1 : \ y = -x^2 + 4x + 4$$

et

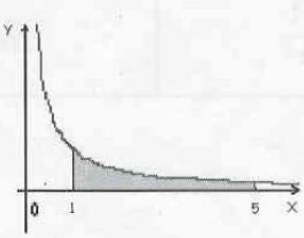
$$p_2 : \ y = 3x^2 - 18x + 29$$

Déterminer la surface de la zone représentée en gris foncé, puis celle de la zone représentée en gris clair.

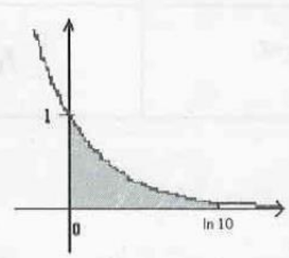
Exercice 6

Calculer les surfaces grisées suivantes :

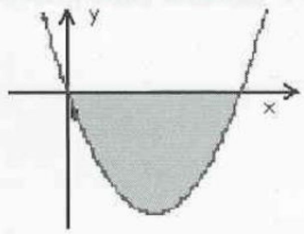
1) $y = \dfrac{1}{x}$



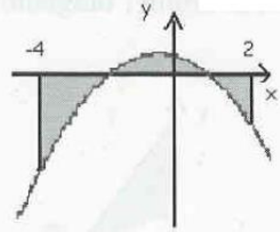
2) $y = e^{-x}$



3) $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x$



4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$



Exercice 7

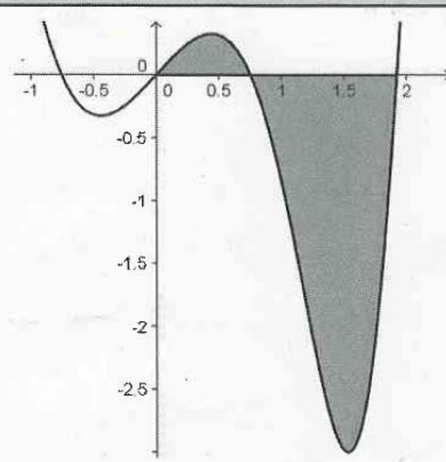
Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int 2x\sin(x)dx$
2. $\int t^2 e^t dt$
3. $\int x^3 \ln|4x| dx$
4. $\int \frac{x}{e^x} dx$
5. $\int \ln(x) dx$
6. $\int x\sqrt{x+1}\, dx$
7. $\int \alpha^2 \sin(\alpha) d\alpha$
8. $\int e^x x^2 + x + 1\, dx$
9. $\int \frac{1}{t} \mathrm{dt}$
10. $\int \frac{6x^5}{11} dx$
11. $\int x^3 e^x dx$
12. $\int e^{-x}\sin(x)dx$
13. $\int x \sin(x)\, \mathrm{d}x$
14. $\int x^2 \cos(x)\, \mathrm{d}x$
15. $\int x \ln(x)\, \mathrm{d}x$
16. $\int \frac{\ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x$

Exercice 8

Voici un extrait du graphe de la fonction

$$f(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$$



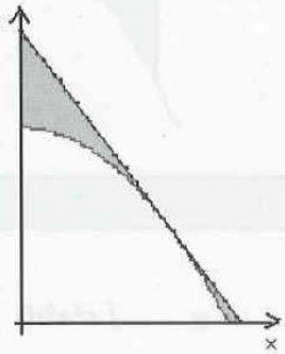
(i) Chercher les abscisses des 4 zéros visibles sur ce dessin.

(ii) Vérifier que $\mathrm{F}(x) = \sin(x^2 + 1)$ est bien une primitive de $f(x)$.

(iii) Déterminer l'aire de la surface grisée.

Exercice 9

Soit $f\ :\ y = 3 - x^2$ et la droite t tangente à f en x = 1. Calculer l'aire grisée.



Exercice 10

Calculer les intégrales définies suivantes :

1) $\int_{-2}^{3} 3x+1 \ dx =$

2) $\int_{-2}^{3} \frac{3}{x^3} \ dx =$

3) $\int_{0}^{2} (2-x)^3 \ dx =$

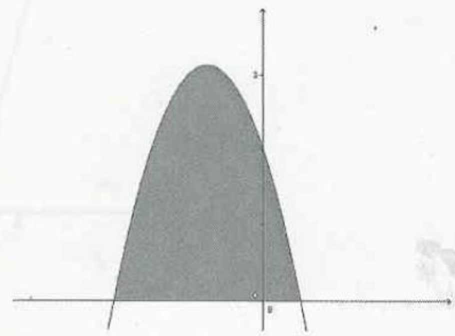
4) $\int_{0}^{2} e^{2x-1} \ dx =$

5) $\int_{1}^{5} \frac{3x^2-4x+1}{x} \ dx$ (Effectuer tout d'abord la division euclidienne).

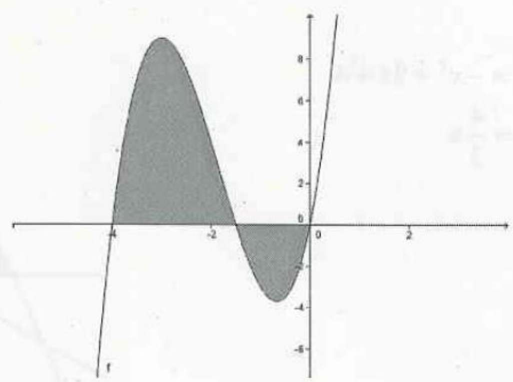
Exercice 11

Calculer les surfaces hachurées (déterminer les bornes par calculs).

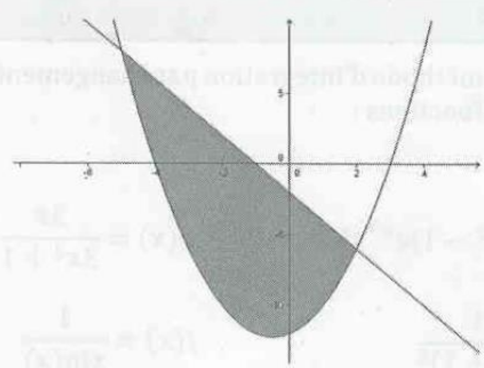
1) $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$



2) $f(x) = 2x^3 + 11x^2 + 12x$

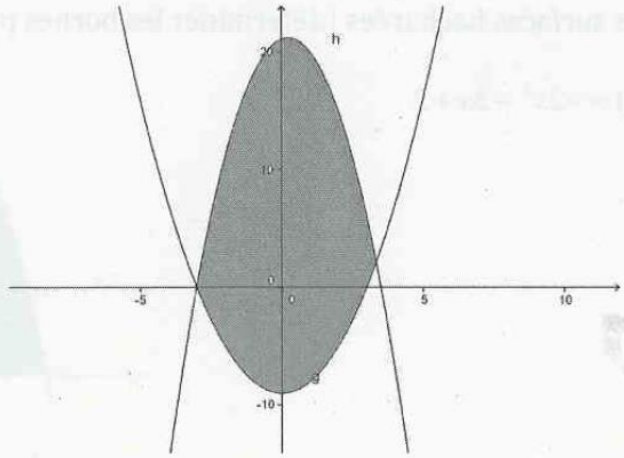


3) $P : y = x^2 + x - 12$
$d : y = -2x - 2$



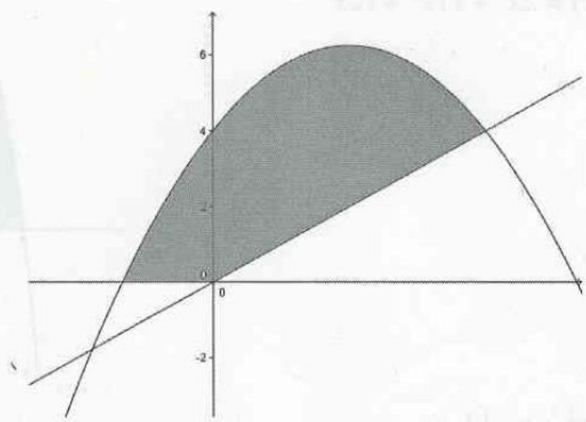
4) $P_1 : y = x^2 - 9$

$P_2 : y = -2x^2 + x + 21$



5) $P : y = -x^2 + 3x + 4$

$d : y = \dfrac{4}{3}x$



Exercice 12

À l'aide de la méthode d'intégration par changement de variable, déterminer une primitive pour chacune des fonctions :

$f(x) = (3x^2 - 1)e^{x^3 - x}$	$g(x) = \dfrac{3x}{3x^2 + 1}$	$h(x) = 4x\sin(x^2 + 1)$
$i(x) = \dfrac{1}{(2x + 1)^5}$	$j(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$	$k(x) = x \cdot \sqrt[3]{1 + x^2}$
$l(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x)^7}$	$m(x) = \dfrac{8x^3 + 4x}{(x^4 + x^2)^3}$	$n(x) = 3xcos(x^2)$
$o(x) = \dfrac{6x}{e^{x^2+1}}$	$p(x) = \dfrac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x}$	$q(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2} \cdot 6x^2$

Exercice 13

Trouver les primitives des deux fonctions suivantes :

$f_1(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ $\qquad$ $f_2(x) = (x^3 + 2x)e^x$

Exercice 14

Par la méthode d'identification des coefficients :

	Chercher une primitive de…	**Sachant que la primitive est de la forme…**
1.	$f(x) = (x^2 + x)e^x$	$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$
2.	$f(x) = (x^2 + 4)e^{-2x}$	$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
3.	$f(x) = (-4x + 2)\sin(2x)$	$F(x) = (ax + b)\sin(2x) + (cx + d)\cos(2x)$

Exercice 15

Soit la fonction $f(x) = e^{-x}(2x - 7)$:

(i) Trouver les points d'intersection du graphe de f avec les axes, les coordonnées du point à tangente horizontale et dessiner le graphe.

(ii) Trouver une primitive de f.

(iii) Calculer l'aire de la surface comprise entre le graphe de f, l'axe Ox et les deux verticales $x = 0$ et $x = 5$.

(iv) Calculer

$$I(b) = \int_{7/2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

où b est un nombre supérieur à $\frac{7}{2}$. Que se passe-t-il lorsque $b \longrightarrow \infty$?

Exercice 16

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$:

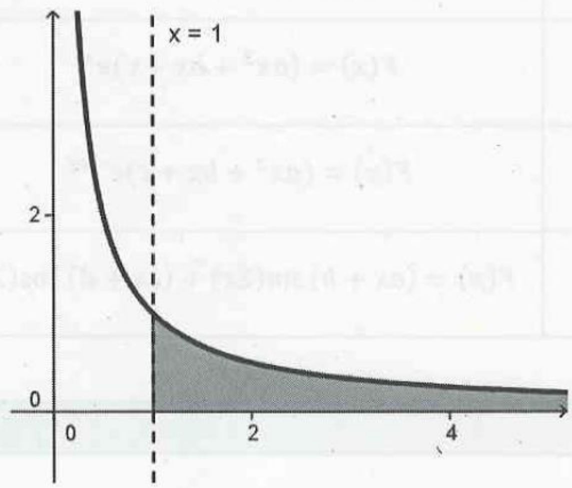
(i) Trouver l'équation de la tangente au point P d'abscisse $x = 9$.

(ii) Dessiner le graphe de la fonction et la tangente en P.

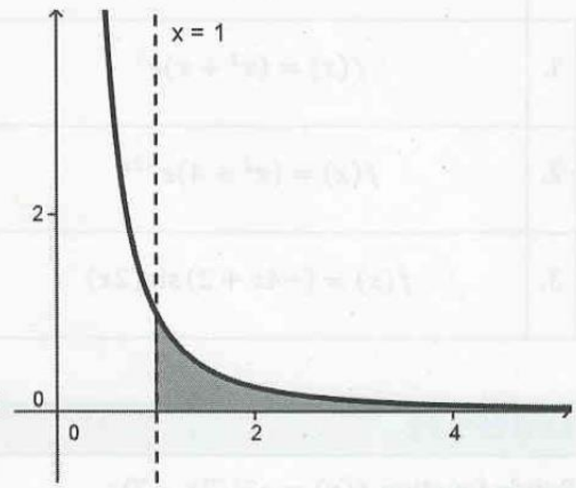
(iii) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f, la tangente en P et l'axe Oy.

Exercice 17

Voici la représentation graphique de deux fonctions rationnelles. Par le calcul intégral, déterminer les surfaces demandées dans le tableau ci-dessous.



$$f(x) = y = \frac{1}{x}$$



$$g(x) = y = \frac{1}{x^2}$$

Surface sous la courbe entre $x = 1$ et ...	$x = 2$	$x = 10$	$x = 100$	$x = \infty$
$f(x) = y = \frac{1}{x}$				
$g(x) = y = \frac{1}{x^2}$				

Exercice 18

Chercher des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(x)^2 \qquad f_2(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} \qquad f_3(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

(sans F&T...)

$$f_4(x) = \frac{4x+5}{x-2} \qquad f_5(x) = x\sqrt{3x-1} \qquad f_6(x) = (4x+1)^3$$

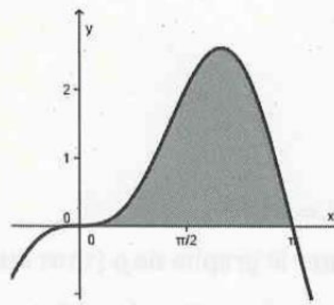
Exercice 19

Examen de maturité 2008

Calculer :

$$\int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

illustrée ci-contre.



Exercice 20

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

<u>Technique à utiliser</u> : commencer par effectuer la division euclidienne afin de réécrire la fonction de la façon suivante :

$$\frac{dividende}{diviseur} = quotient + \frac{reste}{diviseur}$$

La partie *quotient* s'intégrera facilement (c'est un polynôme !) et la partie $\frac{reste}{diviseur}$ s'intègrera à l'aide des méthodes connues.

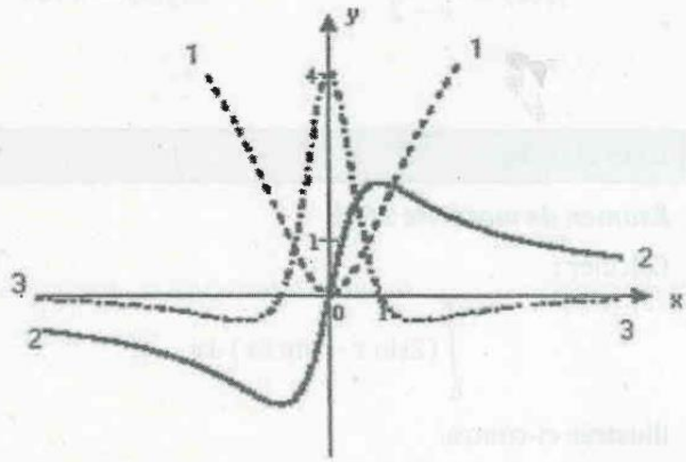
Exercice 21

Examen de maturité 2002

I. Soit

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

1. Déterminer le domaine d'existence et les asymptotes (avec le comportement) de f.
2. Étudier la croissance de f.
3. Calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Trois graphes tracés ci-dessous représentent f, f' et F (une primitive de f). Dire quel graphe représente quelle fonction en argumentant les choix.



II. Soit $g(x) = e^{1-2x}$:

1. Dessiner le graphe de g (sans étude).
2. Montrer que la fonction $S(a) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{1-2a}$ exprime la surface entre le graphe de g, l'axe Ox, l'axe Oy et $x = a$ ($a > 0$).
3. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{a\to\infty} S(a)$$

4. Trouver a pour que $S(a) = \frac{1}{4}e$.

Exercice 22

Examen de maturité 2007

On considère la fonction $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ représentée graphiquement ci-dessous.

a) Établir le tableau de croissance de la fonction, et préciser les coordonnées des points à tangente horizontale.

b) Sur le graphe ci-dessous, graduer correctement les axes puis représenter graphiquement la fonction $g(x) = \frac{1}{4}x^2$.

c) Calculer les coordonnées de A et B, les deux points d'intersection des deux graphes.
<u>Remarque</u> : il est souhaité de calculer en valeurs exactes (exemple : ln(5) plutôt que 1,609...)

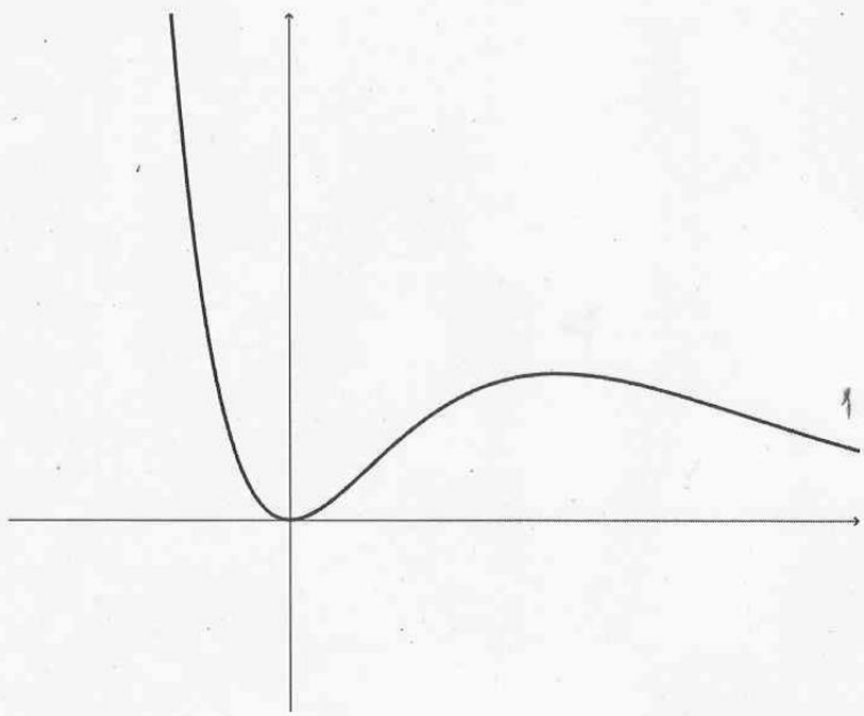
d) Hachurer la surface dont l'aire est donnée par :

$$\int_0^{\ln(16)} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

e) Prouver que $\mathrm{F}(x) = (-2x^2 - 8x - 16)e^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de $f(x)$.

f) Calculer l'aire définie à la question d).

g) Montrer que la tangente au graphe de f en $x = 2$ passe par l'origine.



Exercice 23

Pour quelle valeur de k le nombre

$$I = \int_0^k (4x - x^2)\,dx$$

est-il maximum ?

Interpréter géométriquement.

Exercice 24

En utilisant la formule des volumes de révolution, calculer le volume d'une sphère à l'aide de la courbe suivante : $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$