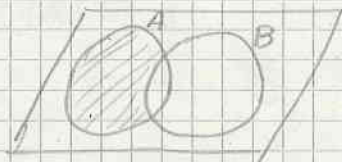


LDDR: Niveau 1: Probabilités

EXERCICE 1.27

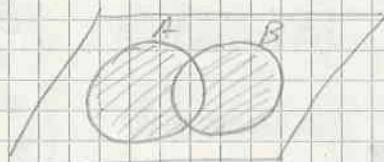
1) $A \cap \bar{B}$



2) $\overline{A \cup B}$



3) $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$



EXERCICE 1.28

1) $S = \{1p, 1d, 2p, 2d, 3p, 3d, 4p, 4d, 5p, 5d, 6p, 6d\}$

2) a) $A = \{2d, 4d, 6d\}$

b) $B = \{1p, 2d, 3p, 3d, 5p, 5d\}$

c) $C = \{1p, 3p, 5p\}$

3) a) $A \cup B = \{2d, 4d, 6d, p2, p3, p5, d3, d5\}$

b) $B \cap C = \{p3, p5\}$

c) $B \cap \bar{A} \cap \bar{C} = \{2p, 3d, 5d\}$

4) $A \cap C = \emptyset$

EXERCICE 1.29

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $P(\bar{A}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

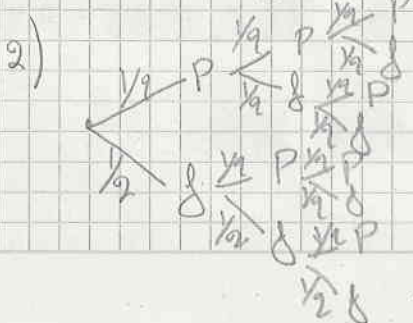
2) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

3) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

4) $P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(B \cap \bar{A}) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

EXERCICE 1.30

1) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$



$P(F \neq 1) = 1 - P(F = 0) =$
 $= 1 - P(PPP) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

3) 4B 3R 5B

tous les cas: $\binom{12}{1} = 12$ cas favorable: $\binom{3}{1} = 3$

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 1.31tous les cas: $\binom{10}{2} = 45$

$$1) \text{ cas favorable: } \binom{3}{2} = 3 \quad P(A) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

$$2) \text{ cas favorable: } \binom{7}{2} = 21 \quad P(B) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

$$3) \text{ cas favorable: } \binom{3}{1} \binom{7}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{0} = 24 \quad P(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

↓ fille

$$4) \text{ cas favorable: } \binom{3}{1} \binom{7}{1} = 21 \quad P(D) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

EXERCICE 1.32

B \ R	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tous les cas: $|S| = 36$

$$1) \text{ Cas favorable } (5,3) (1) \quad P(A) = \frac{1}{36}$$

$$2) (3,5) \text{ et } (5,3) \quad P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$3) (1,1) (2,2) \dots (6,6) \quad P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$4) (6,2) (2,6) (3,5) (5,3) (4,4) \quad P(D) = \frac{5}{36}$$

$$5) P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$6) P(F) = \frac{25}{36}$$

$$7) P(\bar{F}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

EXERCICE 1.33

Si les filles (468) représentent 65% de tous les étudiants, cela signifie qu'il y a $468 : 0.65 = 720$ étudiants au total.

On a donc 720 étudiants dont 468 filles et $720 - 468 = 252$ garçons

Il y a 240 étudiants dans la chorale. Si x est le nb de garçons dans la chorale, on a alors $5x$ filles dans la chorale. On doit donc avoir $x + 5x = 240$
 $\Rightarrow 6x = 240 \Rightarrow x = 40$. Ainsi il y a 40 garçons et $200 = 5 \cdot 40$ filles dans la chorale.

$$a. P(A) = \frac{200}{720} = \frac{5}{18}$$

$$b. P(B) = \frac{468-200}{720} = \frac{268}{720} = \frac{67}{180}$$

$$c. P(C) = \frac{252-40}{720} = \frac{212}{720} = \frac{53}{180}$$

$$d. P(D) = \frac{40}{720} = \frac{1}{18}$$

Exercice 1.34.

On a 4 possibilités: FF, FP, PF, PP

Pour chacun d'eux, la probabilité est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

On gagne 2.- si FF, 1.- si FP et PF et on perd 3.- si PP. On obtient $\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-3) = -\frac{1}{4} < 0$

Ainsi on risque de perdre de l'argent
 le jeu n'est pas donc pas équitable et on ne joue pas

Exercice 1.35

a) la probabilité d'obtenir 1 as est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
 (4 as par 52 cartes) la probabilité d'obtenir 1 autre carte est $\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$. Avec 1 as, on gagne 10 \$. En tirant autre chose, on perd 1 \$. L'espérance de gain est ainsi

$$\frac{1}{13} \cdot 10 - \frac{12}{13} \cdot 1 = \frac{10}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{2}{13} < 0$$

Ainsi, on risque de perdre de l'argent.
 Il vaut donc mieux ne pas jouer

$$b) E = \frac{25}{100} \cdot 15 + \frac{50}{100} \cdot 5 - \frac{25}{100} \cdot 5 = 5$$

Exercice 1.36

Il s'agit de probabilité conditionnelle: la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisée est donnée par $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

a. Ici $A = 3$ faces, $B =$ face sur 1. -, $A \cap B = 3$ faces
 $P(A \cap B) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$ et $P(B) = \frac{1}{2}$

Ainsi $p = P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

b. Ici $A = 3$ faces, $B =$ pile sur 2. -, $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0$
 et $P(B) = \frac{1}{2}$. Ainsi $p = P(A|B) = 0$

c. Ici $A = 3$ faces, $B =$ au moins une fois face,
 $A \cap B = 3$ faces, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(B) = P(\text{au moins une fois face}) = 1 - P(\text{aucun face}) = 1 - P(3 \text{ fois pile}) =$
 $= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Ainsi $p = P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$

Exercice 1.37

Notons E l'ensemble des élèves ayant échoué en math et F l'ensemble de ceux ayant échoué en chimie. $E \cap F$ est l'ensemble des élèves ayant échoué en math et en chimie.

On a $P(E) = 25\% = \frac{1}{4}$, $P(F) = 15\% = \frac{3}{20}$ et $P(E \cap F) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

a. c' est la probabilité conditionnelle.

la formule est $p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Ici $A = E$ et $B = F$. Ainsi $A \cap B = E \cap F$

Ainsi $p(A|B) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{2}{3}$

b. c' est ainsi une probabilité conditionnelle

Ici $A = F$ et $B = E$. Ainsi $A \cap B = F \cap E = E \cap F$

Ainsi $p(A|B) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$

c. On a $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$
 $= \frac{1}{4} + \frac{3}{20} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

d. On a $p(\overline{E \cap F}) = p(\overline{E \cup F}) = 1 - p(E \cup F) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

EXERCICE 1.38

Deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

a. S'il y a 3 enfants, l'univers des possibilités est $\Omega = \{(G; G; G); (G; G; F); (G; F; G); (F; G; G); (G; F; F); (F; G; F); (F; F; G); (F; F; F)\}$

On a: $A = \{(G; G; G); (F; F; F)\}$

$B = \{(G; G; G); (G; G; F); (G; F; G); (F; G; G); (G; F; F); (F; G; F); (F; F; G)\}$

$A \cap B = \{(G; G; G)\}$

$$p(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad p(B) = \frac{7}{8}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Comme $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32} \neq \frac{1}{8} = p(A \cap B)$, on en conclut que A et B ne sont pas indépendants

b. S'il y a 2 enfants, l'univers des possibilités est

$\Omega = \{(G; G); (G; F); (F; G); (F; F)\}$

On a: $A = \{(G; G); (F; F)\}$

$B = \{(G; G); (G; F); (F; G)\}$

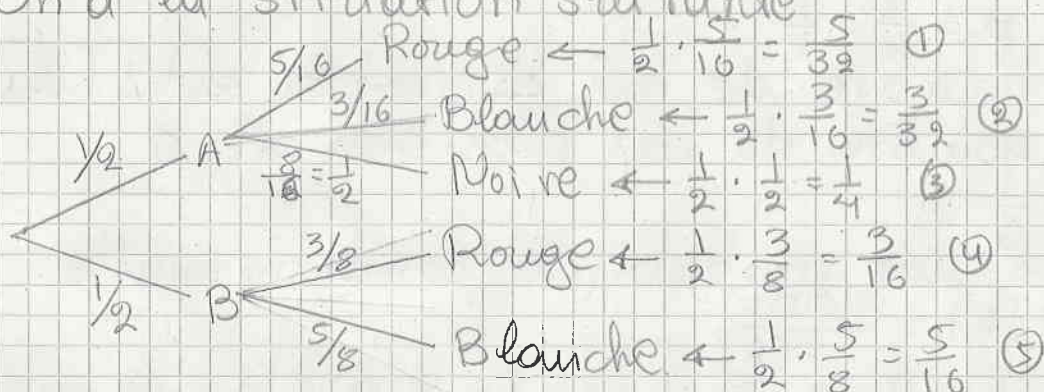
$A \cap B = \{(G; G)\}$

$$p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad p(B) = \frac{3}{4}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Comme $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4} = p(A \cap B)$, on en conclut que A et B ne sont pas indépendants

EXERCICE 1.39

On a la situation suivante



a. a) $\textcircled{1} + \textcircled{4} = \frac{5}{32} + \frac{3}{16} = \frac{11}{32}$

b) $\textcircled{2} + \textcircled{5} = \frac{3}{32} + \frac{5}{16} = \frac{13}{32}$

c) $\textcircled{3} = \frac{1}{4}$

b. Ce sont des probabilités conditionnelles:

$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ E correspond à choisir la boîte A

a. F correspond à la boule rouge

$E \cap F$ correspond à chemin $\textcircled{1}$

On a: $p(E \cap F) = \frac{5}{32}$ et $p(F) = \frac{11}{32}$ (voir a.a)

Ainsi $P(E|F) = \frac{5/32}{11/32} = \frac{5}{11}$

b. F correspond à la boule est blanche

$E \cap F$ correspond au chemin $\textcircled{2}$

On a: $p(E \cap F) = \frac{3}{32}$ et $p(F) = \frac{13}{32}$ (voir a.b)

Ainsi $p(E|F) = \frac{3/32}{13/32} = \frac{3}{13}$

c. F correspond à la boule est noire

$E \cap F$ correspond au chemin $\textcircled{3}$

On a: $p(E \cap F) = \frac{1}{4}$ et $p(F) = \frac{1}{4}$ (voir a.c)

Ainsi $p(E|F) = \frac{1/4}{1/4} = 1$.

EXERCICE 1.40

a. le nombre de cas favorables sont 3

(l'as de pique et une des 3 autres cartes)

le nombre de cas possibles est 2 cartes

regues parmi $4 = \binom{4}{2} = 6$

la $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b. le nombre de cas favorables est 1 (le 10)

le nombre de cas possibles est 6.

$p = \frac{1}{6}$

c. C'est une probabilité conditionnelle:

$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

Ici $E = A$ a les 2 as, $F = A$ a l'as de pique

On a $E \cap F = A$ a les 2 as.

De plus $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$ (voir b) et $P(F) = \frac{1}{2}$ (voir a)

Ainsi $P(E|F) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

d. C'est aussi une probabilité conditionnelle

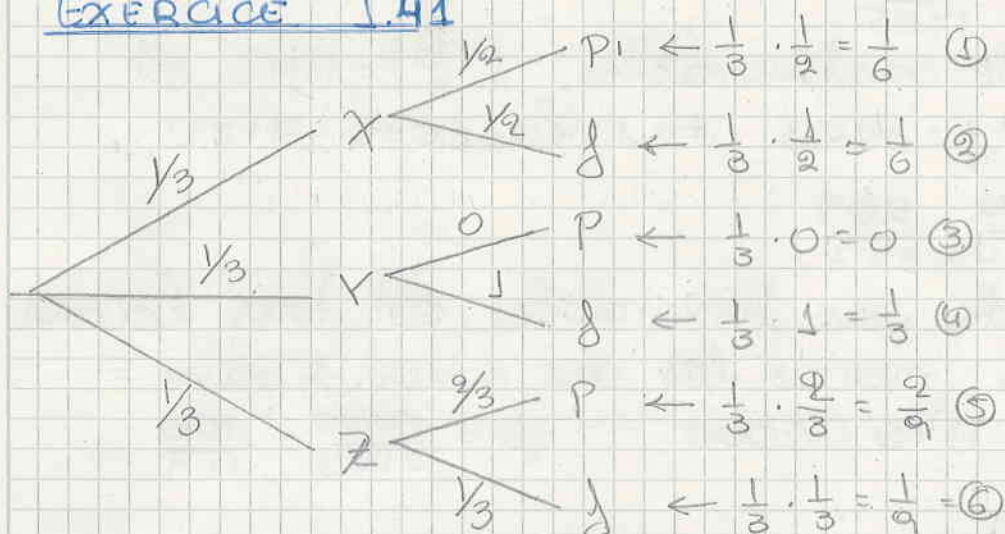
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Ici $E = A$ a l'as de pique; $F = A$ a l'as en au moins des 2 as. On a $E \cap F = A$ a l'as pique.

De plus $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$ (voir a) et $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - P(A \text{ a aucun as}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Ainsi $P(E|F) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$

EXERCICE 1.41



a. la probabilité d'obtenir r face est

$$(2) + (4) + (6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

b. C'est une probabilité conditionnelle:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ici A = pièce X et B = face

On a $A \cap B$ = pièce X et face

En outre, $P(A \cap B) = (2) = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{11}{18}$ (a)

Ainsi $P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{18}} = \frac{3}{11}$

c. C'est aussi une probabilité conditionnelle:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ici A = pièce Z et B = pile

On a $P(A \cap B) = (5) = \frac{2}{9}$ et $P(B) = (1) + (3) + (5) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$

Ainsi $P(A|B) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}$

EXERCICE 1.42

- le nb de cas possibles $\binom{36}{3} = 7140$
- a. le nb de cas favorables est $\binom{4}{3} = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{7140} = \frac{1}{1785}$
- b. le nb de cas favorable: $\binom{4}{2} \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$
 $p = \frac{24}{7140} = \frac{2}{595}$
- c. le nb de cas favorables: $\binom{16}{3} = 560$
 $p = \frac{560}{7140} = \frac{4}{51}$
- d. le nb de cas favorables est $\binom{16}{1} \binom{12}{1} \binom{8}{1} = 256$
 $p = \frac{256}{7140} = \frac{64}{1785}$
- e. le nb de cas favorables: $\binom{20}{3} = 1140$ et
 $\binom{16}{1} \binom{20}{2} = 3040 \Rightarrow 1140 + 3040 = 4180$
 $p = \frac{4180}{7140} = \frac{209}{357}$
- f. le nb de cas favorables est tous les cas possibles moins les cas sous figure =
 $= 7140 - 1140 = 6000 \Rightarrow p = \frac{6000}{7140} = \frac{100}{119}$

EXERCICE 1.43

- a. les 2 tickets ont exactement la même probabilité
- b. l'étoile 5 aura 1 chance sur 9 d'être la 1^{re} sortie et 1 chance sur 8 d'être la 2^{de} étoile sortie
 Ainsi $p = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$
- c. $p = \frac{17}{12}$ car
- d. il y a $\binom{59}{5} = 2118760$ possibilités.
- e. $\binom{9}{2} = 36$
- f. $\binom{9}{2} \cdot \binom{50}{5} = 76275360$. Comme il y a qu'une combinaison gagnante, $p = \frac{1}{76275360}$
- g. Pour 2 étoiles on a $\binom{9}{2} = 36$ possibilités.
 Pour avoir une étoile juste $\binom{2}{1} \binom{7}{1} = 14$
 $p = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

h. la probabilité $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$

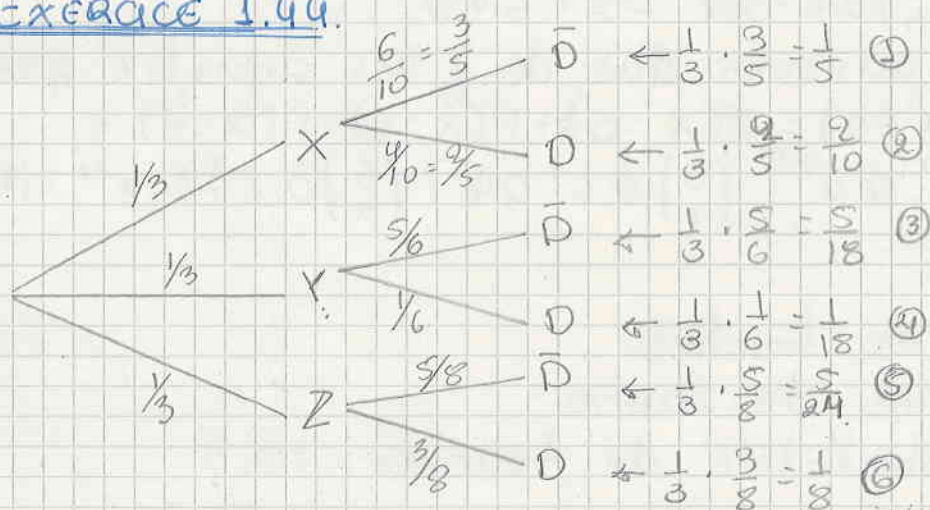
$\bullet 0 = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$\bullet P(X=0) = \binom{45}{5} \quad \bullet P(X=1) = \binom{5}{1} \binom{45}{4}$

$\bullet P(X=2) = \binom{5}{2} \binom{45}{3}$

Donc $P(X \geq 3) = 1 - \binom{45}{5} - \binom{5}{1} \binom{45}{4} - \binom{5}{2} \binom{45}{3} = 0.004782$

Exercice 1.44.



a. la probabilité correspond aux chemins 1, 2, 3

$P(\bar{D}) = \frac{1}{5} + \frac{5}{18} + \frac{5}{24} = \frac{247}{360}$

b. C'est la probabilité conditionnelle $P(Z|\bar{D})$

On a $Z \cap \bar{D} = \text{chemin 5} = \frac{5}{24}$, $P(\bar{D}) = \frac{247}{360}$

Ainsi $P(Z|\bar{D}) = \frac{5/24}{247/360} = \frac{75}{247}$

Exercice 1.45

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où

X est l'atteinte de la cible

k = le nb d'attente, n = le nb de tire

p = la probabilité d'atteindre la cible.

Ici $p = \frac{1}{4}$, Donc $1-p = \frac{3}{4}$. En outre $n = 6$

a. $P(X=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-2} \approx 26.66\%$

b. $P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-6} \approx 0.46\%$

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-0} \approx 82.2\%$

Exercice 1.46

X : le nb de garçons

n : le nb d'enfants = 6

p : la probabilité d'avoir 1 garçon = 0.6 $\Rightarrow 1-p=0.4$

a. $P(X=3) = \binom{6}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^3 \approx 27.648\%$

b. Moins de garçons que de filles signifie que

$X \leq 2$. $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$= \binom{6}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^6 + \binom{6}{1} 0.6^1 \cdot 0.4^5 + \binom{6}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^4 = 17.92\%$

Exercice 1.47

X : le nb de touches

n : le nb de lances

p : la probabilité de toucher = 0.3

$P(X \geq 1) > 90\% = 0.9 \Rightarrow 1 - P(X=0) > 0.9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X=0) < 0.1 \Leftrightarrow \binom{n}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^n < 0.1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0.7^n < 0.1 \Leftrightarrow n \log 0.7 < \log 0.1 \Leftrightarrow n > \frac{\log 0.1}{\log 0.7} \Rightarrow$

$n > 6.45 \Rightarrow n = 7$

Exercice 1.48

a. X : le nb les 6 que l'on veut obtenir
 n : le nb de lances p : la probabilité de ce qu'on veut

$n=5$, $p = \frac{1}{6}$

a) $P(X=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 0.0129\%$

b) $P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 40.19\%$

c) $P(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} \approx 3.215\%$

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 59.81\%$

b. $P(X \geq 1) > 0.995 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0.995 \Leftrightarrow P(X=0) < 0.005$

$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.005 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.005 \Leftrightarrow$

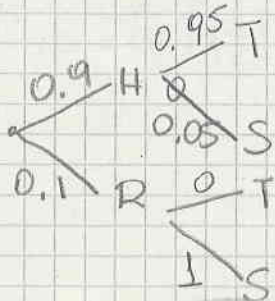
$\Leftrightarrow n \log \frac{5}{6} < \log 0.005 \Leftrightarrow n > \frac{\log 0.005}{\log \frac{5}{6}} \approx 29.06$

$\Rightarrow n \geq 30$

$P(S|H) = 0.05$ la probabilité pour qu'un honnête voyage sans billet

$\Rightarrow P(A|H) = 0.95$ la probabilité pour qu'un honnête voyage avec billet

$P(S|R) = 1$ et $P(A|R) = 0$



d. On cherche la probabilité

$$P(H \cap S) = P(S|H) \cdot P(H) = 0.05 \cdot 0.9 = 0.045$$

$$e. P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap R) = P(A|H) \cdot P(H) + 0 = 0.95 \cdot 0.9 = 0.855$$

$$f. P(\text{sans billet}) = P(S) = 1 - 0.855 = 0.145$$

X: comptabilise les personnes sans billet

$$n = ? \quad p = 0.145$$

$$P(X \geq 1) \geq 99\% \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0.99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0.99 \geq P(X=0) \Leftrightarrow 0.01 \geq \binom{n}{0} 0.145^0 \cdot 0.855^n \Leftrightarrow$$

$$n \log 0.855 \leq \log 0.01 \Leftrightarrow n \geq 29.41 \Rightarrow n \geq 30$$

g. On cherche la probabilité conditionnelle.

$$P(R|S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|R) \cdot P(R)}{P(S)} = \frac{1 \cdot 0.1}{0.145} = 68.97\%$$

EXERCICE 1.51

a. $P = P(C) = \frac{1}{3}$ X = nb des réponses correctes

$$n = 10 \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0.9827$$

b. $p = \frac{1}{3}$ $k = 3$ $n = 10$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0.26$$

$$c. n? \quad P(X \geq 1) = \frac{665}{729} \Leftrightarrow 1 - P(X=0) = \frac{665}{729} \Leftrightarrow \frac{64}{729} = P(X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{729} = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow n = 6$$

$$P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \bar{H}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot 1 = 0.9\bar{3}$$

d. $n = 1$ $k = 1$

$$P(C) = \binom{1}{1} 0.9\bar{3}^1 (1 - 0.9\bar{3})^0 = 0.9\bar{3}$$

la probabilité de répondre juste à n'importe quelle question est ainsi $\frac{14}{15} = 0.9\bar{3}$

c. $n=2$ $k=1$ $p=0.9\bar{3}$

$$P(X=1) = \binom{2}{1} 0.9\bar{3}^1 \cdot 0.066\bar{7}^1 = 0.1245$$

f. On cherche la probabilité conditionnelle

$$P(\bar{H} | I_C) = \frac{P(\bar{H} \cap I_C)}{P(I_C)} = \frac{9/10}{14/15} = 0.9643$$

$$P(\bar{H} \cap I_C) = \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{9}{10} \quad P(I_C) = \frac{14}{15}$$

g. $P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) =$
 $= \binom{10}{9} 0.9\bar{3}^9 \cdot 0.066\bar{7}^1 + \binom{10}{10} 0.9\bar{3}^{10} \cdot 0.066\bar{7}^0 =$
 $= 0.8599$

h. A = Albert a répondu juste

B = Bernard a répondu juste

C = $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ = 1 seul a répondu juste

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(C)} = \frac{0.622}{0.644} = 0.9652$$

$B \cap C$ = Bernard juste et Albert faux = $B \cap \bar{A}$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{3} = 0.622$$

$$P(C) = P(B \cap \bar{A}) + P(\bar{B} \cap A) = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = 0.644$$

EXERCICE 152

a. a) On a les possibilités PP et FF $\Rightarrow P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) On a les possibilités PFF ou FPP $\Rightarrow P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

c) On a les possibilités FPFF ou FFPF $\Rightarrow P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

d) On a les possibilités ...FPFPFF ou PFPFPF, ... $\Rightarrow$

$$P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

b. On doit trouver n tel que $P(X < n) > 99\% = 0.99$

$$\text{On a } P(X < n) = P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=n-1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{C'est une série géométrique.}$$

On sait que $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ Ici $r = \frac{1}{2}$ et on

$$\text{a } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Par conséquent } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} = 1 = 1 - \frac{1}{2^{n-2}}$$

Ainsi, on doit trouver n tel que $1 - \frac{1}{2^{n-2}} > 0.99$

$$\text{De } 1 - \frac{1}{2^{n-2}} > 0.99 \Rightarrow \frac{1}{2^{n-2}} < 1 - 0.99 = 0.01 \Rightarrow 1 < 0.01 \cdot 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} > 100 \Rightarrow n-2 \geq 7 \Rightarrow n \geq 9$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } P(X \text{ pair}) &= P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + P(X=8) + \dots \\
 &= \frac{1}{2^{2-1}} + \frac{1}{2^{4-1}} + \frac{1}{2^{6-1}} + \dots \quad (\text{voir a.d}) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

On sait que $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$$\text{Ici } r = \frac{1}{4}. \text{ Ainsi } S_n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

$$\text{Ainsi } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \right) = \frac{4}{3}$$

Par conséquent $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{4}{3}$ et finalement,
 $P(X \text{ pair}) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

d. le nombre moyen de lancers est

$$\begin{aligned}
 &2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) + 5P(X=5) + \dots = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{16} + \dots + (n-1) \frac{1}{2^{n-2}} + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + (n+1) \frac{1}{2^n} = \\
 &= \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} + \dots
 \end{aligned}$$

Appelons M cette somme infinie (qui correspond donc au nombre moyen de lancers nécessaires)

$$\text{On a: } M = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} + \dots$$

$$\text{et } 2M = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{4} + \frac{5}{8} + \frac{6}{16} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} + \frac{n+2}{2^{n+1}} + \dots$$

$$\text{Ainsi } 2M - M = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots \text{ et donc}$$

$$M = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$\text{D'après b, on a } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{On en déduit que } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) = 2.$$

$$\text{Ainsi } M = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + S = 1 + 2 = 3.$$

Le nombre moyen de lancers nécessaires est donc 3.

f. X : les nombres de morceaux joués avec erreur
 $p = \frac{2}{9}$ $n = ?$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\geq 0.989 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0.989 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0.011 \geq \binom{n}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^n \Leftrightarrow 0.011 \geq \left(\frac{7}{9}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log 0.011 \geq n \log\left(\frac{7}{9}\right) \Leftrightarrow n \geq 17.95 \Leftrightarrow n = 18. \end{aligned}$$

g. le jeu étant équitable, l'expérience de gain doit être nulle.

la probabilité que Paul fasse une erreur vaut $\frac{2}{9} = P(E) \rightarrow P(\bar{E}) = \frac{7}{9}$.

Soit n le nombre de musiciens (y compris Paul) l'expérience s'écrit.

$$\begin{aligned} 14 \cdot \frac{2}{9} + (-0.5) \frac{7}{9} (n-1) &= 0 \Leftrightarrow \frac{28}{9} - \frac{7}{18} (n-1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 56 - 7(n-1) &= 0 \Leftrightarrow 7(n-1) = 56 \Leftrightarrow n = 9 \end{aligned}$$

EXERCICE 1.54

a) Par la loi binomiale; $P = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^{10-5}$ ou p est la probabilité qu'une voiture soit defectueuse.

On a $p = 15\% = 0.15$. Ainsi la probabilité cherchée est $\binom{10}{5} 0.15^5 \cdot 0.85^5 \approx 0.00849 \approx 0.849\%$.

b)

		0.9	T	
	0.15	D	0.1	T
A				
	0.85	D		

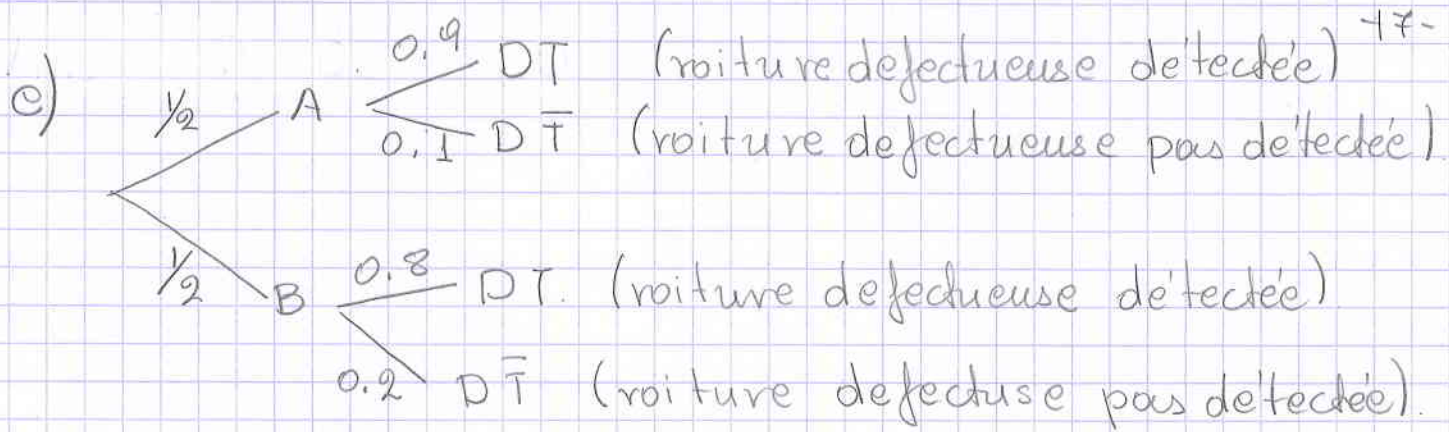
$P(D \cap T) = 0.15 \cdot 0.9 = 13.5\%$

c) X = nb de voitures defectueuses et la defectuosité est détectée par A.

$$p = 0.135 \quad n = ?$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &> 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0.95 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0.05 > \binom{n}{0} 0.135^0 \cdot 0.865^n \Leftrightarrow \log 0.05 > n \log(0.865) \\ &\Rightarrow n > \frac{\log(0.05)}{\log(0.865)} \Rightarrow n \geq 21 \end{aligned}$$

d) $P(A \text{ et } B \text{ ne détecte aucune defectuosité}) =$
 $= P(A \cap \bar{T}) \cdot P(B \cap \bar{T}) = (0.85 + 0.15 \cdot 0.1) \cdot (0.85 + 0.15 \cdot 0.2) =$
 $0.865 \cdot 0.88 = 76.12\%$



Ainsi la probabilité cherchée vaut

$$\frac{1}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.05 + 0.1 = 0.15 = 15\%$$

f) On a $P(\text{Aucune defectuosité de tectée}) =$

$p(\text{voiture pas defectueuse}) + P(\text{A ou B ne de'fecte aucune defectuosité}) =$

$P(\text{voiture pas defectueuse}) + P(\text{A ne de'tecte pas une voiture de'fectueuse}) + P(\text{B ne de'tecte pas une voiture defectueuse})$

$$= 0.85 + 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.2 = 0.8725 = 87.25\%$$

g) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On a: A = voiture defectueuse

B = aucune defectuosité de tectée.

$A \cap B$ = aucune defectuosité de tectée sur une voiture defectueuse,

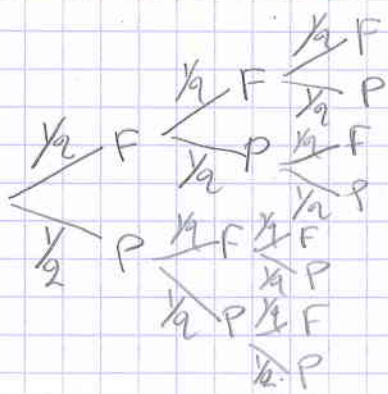
$$P(B) = 0.8725$$

$$P(A \cap B) = 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.5 \cdot 0.2 = 0.0225$$

Ainsi la probabilité cherchée est

$$P(A|B) = \frac{0.0225}{0.8725} = 2.58\%$$

EXERCICE 1.55



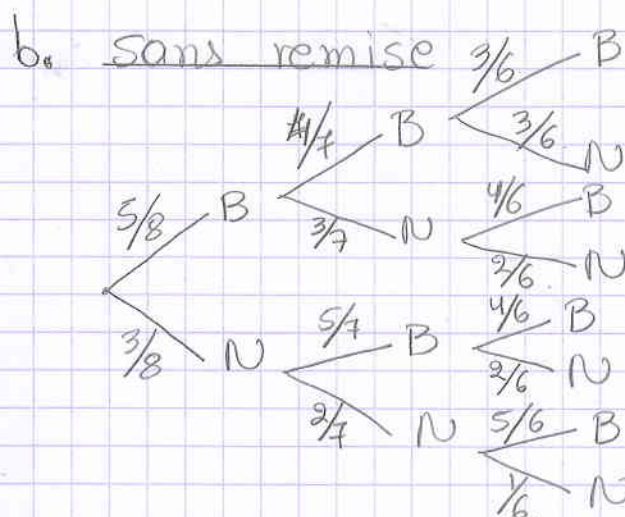
$$P(0F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(1F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$

$$P(2F) = \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$

$$P(3F) = \frac{1}{8}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



X : nb de boules blanches obtenues.

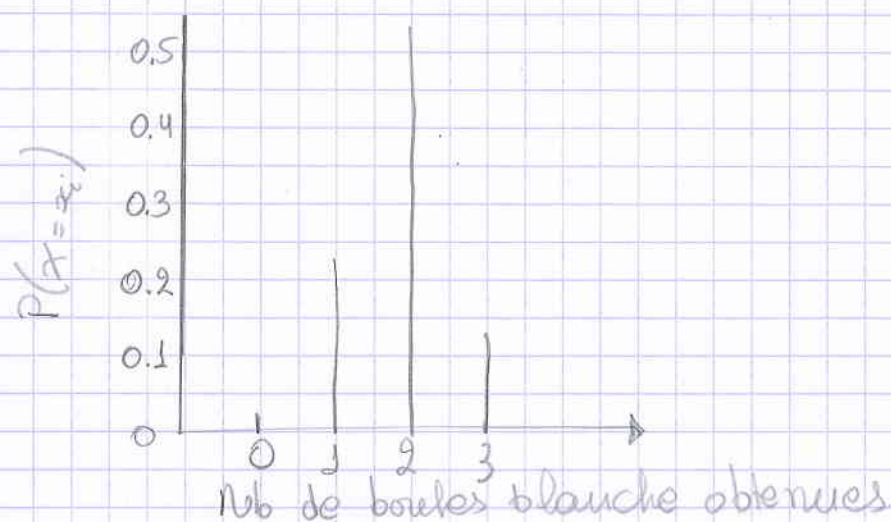
$$P(X=0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{56} + \frac{5}{56} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{5}{28} = \frac{15}{28}$$

$$P(X=3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$



c.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

X : la somme de points obtenus

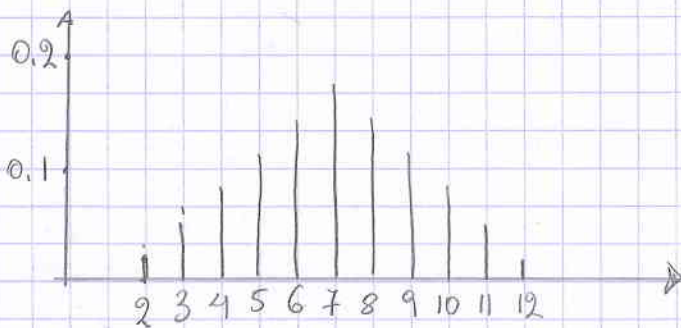
$$P(X=2) = \frac{2}{36} \quad P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad P(X=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=6) = \frac{5}{36} \quad P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=8) = \frac{5}{36} \quad P(X=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$



$$P(3 \leq X \leq 6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} = \frac{2+3+4+5}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

EXERCICE LSG

X : nombre de garçons dans une famille de 6 enfants.

a. $p = \frac{1}{2}$ $n = 6$ $P(X=0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

$$P(X=1) = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

b. $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{3}{32} + 2 \cdot \frac{15}{64} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{64} = \dots = 3$

$$E(X^2) = \frac{0^2 + 1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 20 + 4^2 \cdot 15 + 5^2 \cdot 6 + 6^2 \cdot 1}{64} = \frac{672}{64}$$

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{\frac{672}{64} - 9} = \sqrt{1.5} \approx 1.225$$

Comme la distribution est binomiale $B(6, \frac{1}{2})$.

on a: $\mu = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1.5}$