

Ensemble de définition

► Fonction du type : $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

Page | 1

$$A = D_f = \mathbb{R}.$$

► Fonction du type : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Exemples :

i. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+2)(x-3)}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

ii. $f(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \cos(x)}$

Condition: $1 - \cos(x) \neq 0$.

$$1 - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

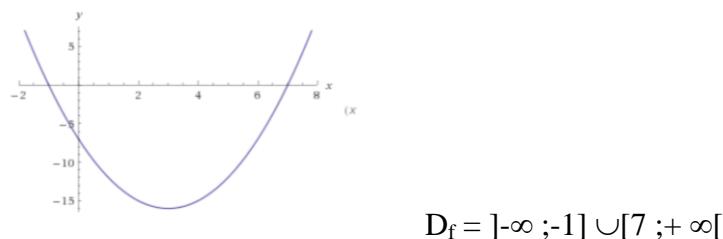
► Fonction du type: $f(x) = \sqrt{g(x)}$,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$$

Exemples :

i. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 7}$

Condition: $x^2 - 6x - 7 \geq 0$. Par le graph on conclut: $x \leq -1$ ou $x \geq 7$



ii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x-4}$

Conditions: $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$ d'où $D_f =]-\infty; -3] \cup [3; 4[\cup]4; +\infty[$

Page | 2

■ Fonction du type: $f(x) = \log_{g(x)} h(x)$,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) > 0 \text{ et } 0 < g(x) \neq 1\}.$$

■ Fonction du type : $f(x) = g(x)^{h(x)}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0 \text{ et } h(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in D_h \mid g(x) > 0\}.$$

Exemples :

i. $f(x) = \ln(x-1)$. Condition : $x-1 > 0$. Donc $x > 1$ donc $D_f =]1; +\infty[$.

ii. $f(x) = \log(x^2)$. Condition : $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

iii. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

Conditions: $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

iv. $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

Conditions: $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$$\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 1 \quad D_f =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

v. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)}$

Conditions: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$\ln(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x+2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$

$D_f =]1; +\infty[$

Parité

Définition : Une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite paire si pour tout $x \in A$ on a:

Page | 3

$$-x \in A \text{ et } f(-x) = f(x)$$

Définition : Une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite impaire si pour tout $x \in A$ on a:

$$-x \in A \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

Remarques :

- Le graphe d'une fonction paire a comme axe de symétrie l'axe Oy.
- Le graphe d'une fonction impaire a comme centre de symétrie l'origine (0 ;0).
- L'ensemble de définition d'une fonction paire ou impaire est symétrique par rapport à 0.

Pour montrer qu'une fonction est paire ou impaire on suit les étapes:

- On contrôle si l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.
- On trouve la valeur $f(-x)$ et on la compare avec $f(x)$.

Exemples :

i. $f(x) = \sin(x)$. $D_f = \mathbb{R}$ est f est impaire car $\sin(-x) = -\sin(x)$

ii. $f(x) = \cos(x)$. $D_f = \mathbb{R}$ est f paire car $\cos(-x) = \cos(x)$

iii. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{4 - x^2}}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 < 0\} = (-2, 2)$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sqrt{4 - (-x)^2}} = \frac{\cos(x)}{\sqrt{4 - x^2}} = f(x). \text{ Donc } f \text{ est paire.}$$

iv. $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{1-x^2}}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 < 0\} = (-1, 1)$

Page | 4 $f(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{x^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}$

Comme $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, f n'est pas ni paire ni impaire

v. $f(x) = \sin(x^3 - 5\sin x + x)$. $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \sin((-x)^3 - 5\sin(-x) + (-x)) = \sin(-x^3 + 5\sin x - x) = -\sin(x^3 - 5\sin x + x) = -f(x).$$

Donc f est impaire

Points d'intersection - Zéros

Rappels :

Page | 5

- Intersection avec l'axe Ox : On pose $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
- Intersection avec l'axe Oy : On pose $x = 0$, alors on trouve la valeur $f(0)$.
- Intersection de deux graphes : On pose $f(x) = g(x)$.

Exemples :

i. $f(x) = (x+1)e^x$, $D_f = \mathbb{R}$

axe Ox : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ car $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $I_x = (-1 ; 0)$

axe Oy : $f(0) = 1 \cdot e^0 = 1$. Donc $I_y = (0 ; 1)$

ii. $f(x) = \frac{e^{2x-1}}{x+3}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

axe Ox : $f(x) = 0$ impossible car $e^{2x-1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

axe Oy : $f(0) = \frac{e^{-1}}{3} = \frac{1}{3e}$. Donc $I_y = (0, \frac{1}{3e})$

iii. $f(x) = \ln(-x + 6)$. $D_f =]-\infty; 6[$

axe Ox : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(-x+6) = 0 \Leftrightarrow -x+6 = 1 \Leftrightarrow x = 5$. $I_x = (5 ; 0)$

axe Oy : $f(0) = \ln 6$. $I_y = (0 ; \ln 6)$

iv. $f(x) = 4e^{-2x}$ et $g(x) = e^{x+3}$. On cherche les points d'intersection.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4e^{-2x} = e^{x+3} \Leftrightarrow \ln 4 + \ln e^{-2x} = \ln e^{x+3} \Leftrightarrow \ln 4 - 2x = x + 3 \Leftrightarrow 3x = \ln 4 - 3 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 4 - 3}{3} \text{ On remplace en } g : g\left(\frac{\ln 4 - 3}{3}\right) = e^{\frac{\ln 4 - 3}{3}} = e^{\frac{\ln 4}{3}} \cdot e^{-1} = \sqrt[3]{e^{\ln 4}} \cdot e^{-1} = \frac{\sqrt[3]{4}}{e} \text{ Alors le point}$$

d'intersection est $I = \left(\frac{\ln 4 - 3}{3}; \frac{\sqrt[3]{4}}{e}\right)$

Tableau des signes

Pour construire le tableau des signes on a besoin de :

Page | 6

- tous les points où $f(x) = 0$
- tous les points où on ne peut pas définir la fonction f
- factoriser $f(x)$

Exemples :

i. $f(x) = (x+2)^2 \cdot e^{-x}$. $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

	$-\infty$	-2	$+\infty$
$(x+2)^2$	+	0	+
$f(x)$	+	0	+

ii. $f(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2)$. $D_f =]0 ; +\infty[$

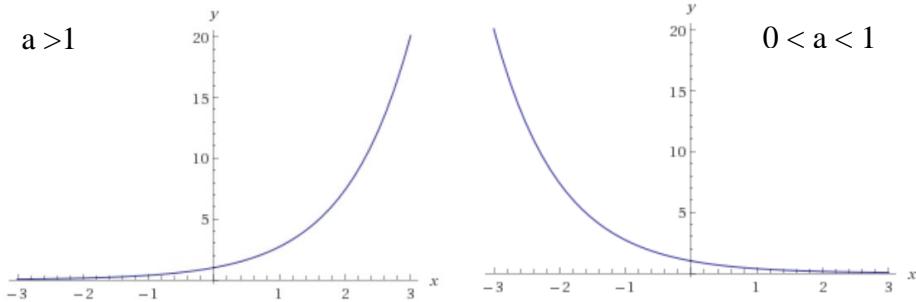
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^2.$$

	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+
$\ln(x) - 2$	-		-	0
$f(x)$	+	0	-	0

Limites des fonctions exponentielles – logarithmiques

Page | 7

Rappels: $\frac{\text{nbre}}{\infty} = 0$ $\frac{\text{nbre}}{0} = \infty$



■ Fonction exponentielle $f(x) = a^x$, $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & , a > 1 \\ 1 & , a = 1 \\ 0 & , a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & , a > 1 \\ 1 & , a = 1 \\ +\infty & , a < 1 \end{cases}$$

- En particulière pour $a = e$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$$

Exemples:

i. $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^3 - 3x + 4}}$ en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3 - 3x + 4} = 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2}{x^3 - 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

ii. $f(x) = e^{\frac{x^2}{x+4}}$ en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+4} = -\infty. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2}{x+4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

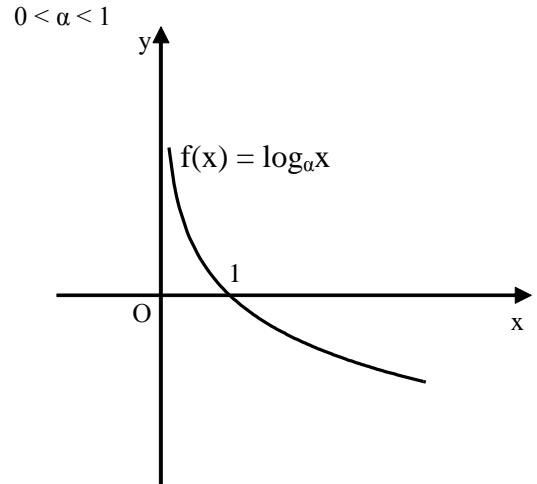
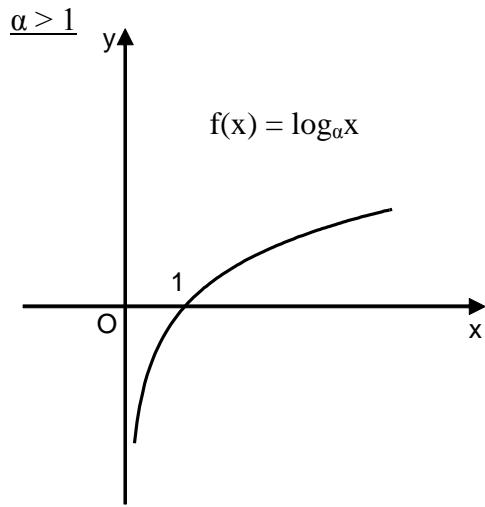
Page | 8 **iii.** $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^x = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

iv. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ en 0^+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

 **Fonction logarithmique $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$**



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = \begin{cases} +\infty & , \quad a > 1 \\ -\infty & , \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_a x) = \begin{cases} -\infty & , \quad a > 1 \\ +\infty & , \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

- En particulière pour $a = e$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\ln x) = \ln x_0.$$

Exemples:

i. $f(x) = \ln(x^3)$ en $+\infty$.

Page | 9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

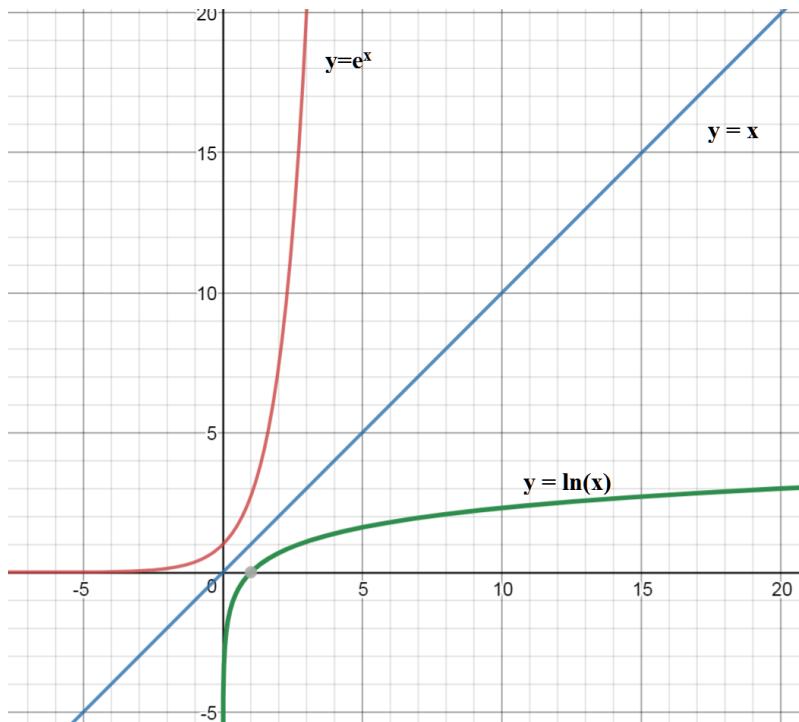
ii. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

iii. $f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(\ln x)]$ en 1^+ .

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(\ln x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x)] = -\infty$.

⊕ Encore de limites



En observant les graphiques ci-dessus on conclut:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

Exemples:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2)e^x = 0$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \cdot e^{5-x}]$. On a $+\infty \cdot 0$ mais comme l'exponentielle "court" plus vite $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \cdot e^{5-x}] = 0.$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 \cdot e^{5-x}] = +\infty \cdot +\infty = +\infty.$

Asymptotes

Pour les asymptotes on a les règles générales :

Page | 11

Asymptotes verticales :

La droite $x = x_0$ est dite **asymptote verticale** (A. V.) de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

- Alors on cherche les asymptotes verticales aux points où la fonction n'est pas définie.

Asymptote affine (Omplique)

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote affine** (A. A.) de la courbe représentative de la fonction f si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0$$

Les valeurs m et h sont calculés avec les formules suivantes :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \quad (\text{idem en } -\infty)$$

Remarque : Si m tend vers l'infini, alors il n'y a pas d'asymptote affine. Inutile donc d'essayer de calculer h .

Remarque : Si $m = 0$ on cherche pour asymptote horizontale.

Attention ! L'asymptote affine n'est pas forcément la même en $+\infty$ et en $-\infty$. Il faut donc étudier les deux cas. (C'est en particulier le cas avec des fonctions exponentielles ou la fonction $\arctan(x)$).

Exemples :

i. $f(x) = (x-2) \cdot e^{2x}$

Page | 12 AV. Comme $D_f = \mathbb{R}$ il n'existe pas.

AO.

$+\infty: m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)e^{2x}}{x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$. Donc il n'existe pas AO/AH quad x tend vers $+\infty$.

$$-\infty: m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)e^{2x}}{x} = 0$$

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2) \cdot e^{2x}] = 0$$

Donc en $-\infty$ on a l' asymptote horizontale $y = 0$.

ii. $f(x) = \frac{\ln(x^3 + 1)}{x} + x$. $D_f =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

AV. Les candidats sont $x = -1$ et $x = 0$.

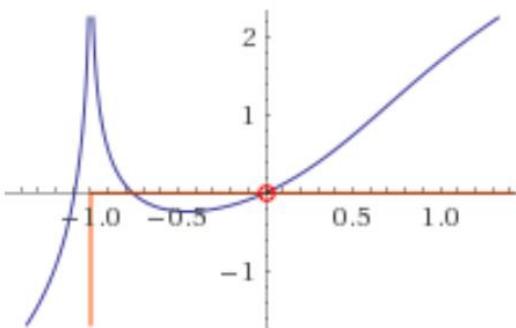
$x = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{\ln(x^3 + 1)}{x} + x \right] = -\infty - 1 = -\infty$. Donc la droite $x = -1$ est une asymptote verticale de f .

$x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x^3 + 1)}{x} + x \right] = 0$ (?) et donc pour $x = 0$ on n'a pas une asymptote verticale mais que un

« trou »



A.O.

En $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^3 + 1)}{x^2} + 1 \right] = 1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^3 + 1)}{x} \right] = 0.$$

Donc la droite $y = x$ est une asymptote oblique de f en $+\infty$

En $-\infty$

Même comportement

Dérivées

⊕ Dérivées des fonctions usuelles

Page | 14

Les tables ci-dessous regroupent les fonctions usuelles. a et n sont des constantes.

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$
$ x $	$\text{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

⊕ Règles de dérivation

Soit f et g deux fonctions dérivables et λ un nombre réel.

1. $(f+g)' = f' + g'$

2. $(f-g)' = f' - g'$

3. $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

5. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

6. $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Exemples :

i. $f(x) = x^2 e^x$

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$$

ii. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$$

iii. $f(x) = \ln(x^2)$. $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)2x = \frac{1}{x}$

iv. $f(x) = \ln(\cos(2x+1))$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(2x+1)} \cdot (\cos(2x+1))' = \frac{1}{\cos(2x+1)} \cdot (-\sin(2x+1)) \cdot 2 = \frac{-2\sin(2x+1)}{\cos(2x+1)}$$

Tangente

La valeur $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe $f(x)$ en $x = x_0$.

La tangent du graphe de la fonction f au point x_0 est donnée par la formule :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0$

Exemple :

i. Donner l'équation de la tangente au graphe de f , $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 8)$, au point d'abscisse $x = 1$.

- $f(1) = \ln(1 - 3 + 8) = \ln 6$

- $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+8}$

- $f'(1) = -\frac{1}{6}$

- l'équation de la tangent est $y - (\ln 6) = -\frac{1}{6}(x-1)$ ou $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6} + \ln 6$

ii. $f(x) = x^2 \cdot e^{5-x}$. Calculer les coordonnées des points à tangent horizontale.

- $f'(x) = 2xe^{5-x} + x^2(-1)e^{5-x} = xe^{5-x}(2-x)$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{5-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$

- $x = 0$, $f(0) = 0$, $x = 2$ $f(2) = 4e^3$. Donc $I_1 = (0 ; 0)$ et $I_2 = (2 ; 4e^3)$

iii. Pour quelles valeurs de a le graphe de la fonction $f(x) = (x^2 + ax + 1)e^x$ admet-il deux points a tangente horizontal ?

$$f'(x) = (2x+a)e^x + (x^2+ax+1)e^x = e^x(x^2 + ax + 1 + 2x + a) = e^x(x^2 + (a+2)x + 1 + a).$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (a+2)x + 1 + a = 0$. Comme on veut 2 points il faut que $\Delta > 0$. Alors,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 - 4(1+a) > 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 - 4 - 4a > 0 \Leftrightarrow a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$$

Croissance – extremums

Page | 17 Soit $f(x)$, une fonction définie sur l'ensemble I .

Si $f(x) < 0$ alors f est décroissante sur I

Si $f(x) > 0$ alors f est croissante sur I .

Définition : On dit que f atteint un **maximum (minimum)** en point x_0 si $\forall x \in I$

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Le maximum (minimum) est la valeur $f(x_0)$.

► Pour étudier la croissance et l'extremum de f on construit le tableau de variations.

Le tableau de variations est le tableau des signes de la dérivée de f .

Si $f'(x_0) = 0$ et f' change le signe d'un côté à l'autre alors f atteint un extremum en $x=x_0$.

Exemples

i. $f(x) = (-x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (-2x - 2)e^{-x} - (-x^2 - 2x)e^{-x} = e^{-x}(-2x - 2 + x^2 + 2x) = e^{-x}(x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}.$$

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	0	-	0
f'	+	0	-	0
F	\nearrow	Max	\searrow	Min

$$\text{Max}(f) = f(-\sqrt{2}) = (-(-\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}} = (-2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}}$$

$$\text{Min}(f) = f(\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}} = (-2 - 2\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}}$$

Exemples entiers

Exemple 1:

Page | 18

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

- Ensemble de définition :

Conditions : $x > 0$ et $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Donc $D_f =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

- Parité : ni – ni car le domaine n'est pas symétrique
- Intersection avec les axes :

- Ox : $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\ln x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Impossible.

- Oy : $x = 0$ Impossible

- Tableau des signes

	0	1	$+\infty$
x^2	+		+
$\ln x$	-	0	+
$f(x)$	-	//	+

- Asymptotes

AV : Les candidats sont $x = 0$ et $x = 1$.

- $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = 0$ Donc il n'existe pas asymptote en $x = 0$
- $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\ln x} = -\infty$. Donc la droite $x = 1$ est une AV.

AO/AH : $y = mx + h$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = 0$$

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Donc il n'existe pas AO ou AH.}$$

- Croissance – Tableau des variations

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \cdot \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{e}$$

	0	1	\sqrt{e}	$+\infty$
x	+	+	+	+
$2\ln x - 1$	-	-	0	+
$(\ln x)^2$	+	0	+	+
$f'(x)$	-	0	-	0
$f(x)$	\searrow	\searrow	\searrow	Min

- Graphe

