Ensemble de définition

- **Fonction du type** : $\mathbf{f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1}x^{v-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0}$,

  $A = D_f = \mathbb{R}$.

- **Fonction du type : $\mathbf{f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}}$,**

  $D_f = \{x \in R \mid Q(x) \neq 0\}$.

Exemples :

i. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)(x-3)}$. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2, 3\}$

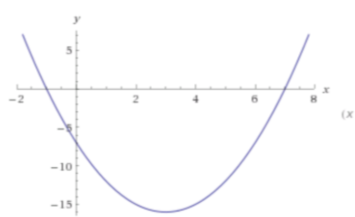
- **Fonction du type : $\mathbf{f(x) = \sqrt{g(x)}}$,**

  $D_f = \{x \in R \mid g(x) \geq 0\}$.

Exemples :

i. $f(x) = \sqrt{x^2-6x-7}$

Condition: $x^2 - 6x - 7 \geq 0$. Par le graph on conclut: $x \leq -1$ ou $x \geq 7$



$D_f =]-\infty ;-1] \cup [7 ;+\infty[$

Points d'intersection - Zéros

Rappels :

- Intersection avec l'axe Ox : On pose y = 0 ⇔ f(x) = 0
- Intersection avec l'axe Oy : On pose x = 0, alors on trouve la valeur f(0).
- Intersection de deux graphes : On pose f(x) = g(x).

Exemples :

i. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

axe Ox : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. Donc $I_{1x} = (1\ ;\ 0)$, $I_{2x} = (-1\ ;\ 0)$

axe Oy : $f(0) = \frac{1}{4}$. Donc $I_y = (0\ ;1/4)$

Tableau des signes

Pour construire le tableau des signes on a besoin de :

- tous les points ou f(x) = 0
- tous les points ou on ne peut pas définir la fonction f (exclus)
- factoriser f(x)

Exemples :

i. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 2)$. $D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3= 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 1$ car $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0	+	
f(x)		+	0	-	0	+	

ii. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2;1\}$

$f(x) = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x-2		-	|	-	0	+	
f(x)		-	//	-	//	+	

Asymptotes

Pour les asymptotes on a les règles générales :

- **Asymptotes verticales** :

On cherche les asymptotes verticales aux points ou la fonction n'est pas définie.

Si on a un exclus on remplace la valeur et si on obtient $\frac{nb}{0}$ on a une asymptote verticale

Exemples :

i. f(x) = $\frac{-3x+4}{2x+3}$ D = ℝ**{-3/2}**

A.V. On contrôle pou x = -3/2. On remplace x = -3/2. On obtient $\frac{17/2}{0}$. Alors x = -3/2 est une asymptote verticale.

- **Asymptote affine (Omplique)** (d' une fonction f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$)

  - Deg(P) < deg(Q) : AH y = 0 (axe des x)

    f(x) = $\frac{x+4}{-x^3+1}$, AH : y = 0

  - Deg(P) = deg(Q) : AH y = quotient des coefficients des plus grandes puissances.

    f(x) = $\frac{-3x+4}{2x+3}$. AH : y = $\frac{-3}{2}$

  - Deg(P) = deg(Q) +1 , on effectue la division euclidienne P :Q. Le quotient de cette division est l'asymptote oblique.

    f(x) = $\frac{x^2+2x-1}{x-3}$ = x+5 + $\frac{14}{x-3}$. AO : y = x+5

Dérivées

Dérivées des fonctions usuelles

Les tables ci-dessous regroupent les fonctions usuelles. a et n sont des constantes.

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$
$\lvert x\rvert$	$\operatorname{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Règles de derivation

Soit f et g deux fonctions dérivables et λ un nombre réel.

1. $(f+g)' = f' + g'$	**2.** $(f-g)' = f' - g'$
3. $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$	**4.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	**6.** $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Dérivée des radicaux

On écrit les racines comme fractions

Exemple :

$f(x) = x\sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt{x^3}$. $D_f = \mathbb{R}_+$

$f\,'(x) = (x\sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt{x^3}\,)' = (x\,x^{\frac{4}{5}}x^{\frac{3}{2}})' = (\,x^{\frac{33}{10}})' = \dfrac{33}{10}x^{\frac{23}{10}} = \dfrac{33\sqrt[10]{x^{23}}}{10} = \dfrac{33x^2\sqrt[10]{x^3}}{10}$.

Tangente

La valeur f ´(x) est la pente de la tangente à la courbe f(x) en x = x_0.

Tangente horizontale ⇔ f´(x) = 0

Exemple :

i. Donner l’équation de la tangente au graphe de f, $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$, au point d’abscisse x = -2.

- f(-2) = -24
- f´(x) = -6x+5
- f´(-2) = 17

- l’équation de la tangent est -24 =17(-2)+h ⇔ h = 10. Donc y = 17x+10

Croissance – extremums

Soit f(x), une fonction définie sur l’ensemble I.

Si $f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur I Si $f'(x) > 0$ alors f est croissante sur I.

- Pour étudier la croissance et l’extremum de f on construit le tableau de variations.

Le tableau de variations est le tableau des signes de la dérivée de f.

Si $f'(x_0) = 0$ et f′ change le signe d’ un cote a l’autre alors f atteint un extremum en $x=x_0$.

Exemples

i. $f(x) = (-x^2 - 2x)$. $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -2x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-2x - 2$		+	0	-	
f′		+	0	-	
F		↗	Max	↘	

Max(f) = f(-1) = 1