LJP: Exponentielles – Logarithmes

EXERCICE 1

Complétez ce tableau selon les exemples :

$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$	3^{-3}	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$
$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$0{,}125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$
$0{,}0001^{-\frac{3}{4}}$	$16^{-\frac{3}{4}}=$	$(7^2 \cdot 7^7)^{\frac{2}{9}}$	$\left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^2$

EXERCICE 2

Écrivez les expressions données sous la forme de puissance (si possible) :

$\frac{1}{a} = a^{-1}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt[4]{b^3}$	$\sqrt{\frac{x^2}{x^5}}$
$\frac{(d^2)^3}{\sqrt{d}}$	$\sqrt{(y^3)^6}$	$\frac{1}{k^3 \cdot k^4}$	$(3^2 \cdot 3^{-3})^{-\frac{1}{2}}$
$a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}} =$	$(a+a)^2 \cdot a^4$	$(x^2 - x)^5 =$	$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y^7 \cdot \sqrt[3]{y^8}}$

EXERCICE 3

Mettez sous forme de puissance (si possible) et simplifiez :

$$\frac{\sqrt{18} \cdot 2^3}{3^{\frac{1}{2}}} =$$

$=$

$$\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2^{\frac{1}{2}} + 2} =$$

$$\frac{2^{-\frac{1}{3}} + 2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} =$$

EXERCICE 4

Complétez :

expression	Valeur de l'inconnue	Écriture équivalente de l'expression	Appellation(s) de l'inconnue
$6^2 = x$			
$x^4 = 1$			
$3^x = 9$			
$x^2 = 10'000$			
$x^4 = 10'000$			
$20^x = 8'000$			
$x^5 = 2$			
$5^x = 10$			
$10^x = 5$			
$2^x = 8'000$			

EXERCICE 5

Complétez selon l'exemple:

logarithme	puissance
$\log_2 32 = 5$	$2^5 = 32$
$\log_3 27 =$	
$\log_4 2 =$	
$\log_2(4) =$	
$\log_{10} \frac{1}{100} =$	
$\log_3 1 =$	
$\log_5 0{,}04 =$	
$\log_{12} \dots = -2$	
$\log_3 3 =$	

EXERCICE 7

Après avoir transformé la base et l'argument sous forme de puissance, calculez les logarithmes:

$\log_3(2187) =$	$\log_{10}(100) =$	$\log_{10}(50) =$
$\log_{0.5}(0.125) =$	$\log_5(0.2) =$	$\log_{0.25}(16) =$

EXERCICE 8

Pour chaque fonction, supposée ayant image réelle, écrivez les contraintes que la variable x doit respecter. Déterminez ensuite le domaine des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 4^{\frac{3-x}{x+1}}$ $D_1 =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$f_2(x) = log_4 \frac{3-x}{x+1}$ $D_2 =]-1; 3[$

$f_3(x) = (0{,}7)^{\sqrt[2]{\frac{4}{3+x}}}$ $D_3 =]-3; +\infty[$

$f_4(x) = log_{(-x)} \frac{8}{3x+4}$ $D_4 = \left]-\frac{4}{3}; -1\right[\cup]-1; 0[$

$f_5(x) = log_{(1)} x$ $D_5 = \emptyset$

$f_6(x) = \pi^{\sin(2x)}$ $D_6 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

EXERCICE 9

Complétez ce tableau:

Fonction	Conditions de réalité	Domaine
$y = f(x) = \frac{10}{5 - \log_5 x}$		
$y = f(x) = \log_{(\pi - ex)} 10$		
$y = f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{2-x}}$		
$y = f(x) = 7^x - \frac{\sqrt{x}}{2-x}$		
$y = f(x) = \sqrt[9]{\frac{\sqrt{7}}{x}} + \log_8 x$		
$y = f(x) = \sqrt[2]{\frac{\sqrt[9]{-7}}{x}} + \log_8 x$		
$y = f(x) = 8^{\log_8 x}\, \sqrt[54]{-3x - 12}$		
$y = f(x) = 16^{x+7}$		
$y = f(x) = \log_{0,7} \frac{11 + x^2}{2x - 3}$		

EXERCICE 10

Déterminez les propriétés des logarithmes à partir de celles des puissances.

1. Soit $a^0 = 1$; par définition de logarithme on déduit : $\log_a(1) = 0$.
2. Soit $a^1 = a$;...
3. Soit : $a^x = u$ et $a^y = v \Rightarrow$ (déf. log) $x = \log_a u$ et $y = \log_a v$.
   Or, puisque $a^{x+y} = a^x \cdot a^y = u \cdot v \Rightarrow$; (déf. log) $\log_a a^{x+y} = \log_a(u \cdot v)$:
   Ainsi (grâce à la définition de logarithme) : $x + y = \log_a(u \cdot v) \Rightarrow \log_a u + \log_a v = \log_a(u \cdot v)$.
4. Soit :

EXERCICE 11

Résoudre les équations ci-dessous, donnez des solutions exactes:

(a) $x-1 = \log_2(3)$
(b) $5 \cdot 3^x = 20$
(c) $3^x = 2^{x+1}$
(d) $\log_4(x-1) = 2$
(e) $\log_5(x^2) = 1$
(f) $4 \cdot 7^x = 3^{2x}$
(g) $9 = \log_x(7)$
(h) $10 = \log_2(x)$
(i) $2^{x+7} = 5 \cdot 3^{8-5x}$

EXERCICE 12

À l'aide de la définition de logarithme et de ses propriétés, déterminez la valeur de x :

(i) $\log(x) = \log(3) + \log(4)$
(ii) $\log(x) = \log(7) - \log(6) + \log(48)$
(iii) $\log(x) = 2 - 3\log(2) + \log(4) - 2\log(5)$
(iv) $2\log(x-1) = \log(3-x) + \log(3+x)$
(v) $\log(x^2 + 3x) = \log 5 + \log 4x$
(vi) $3 + \log(5) = \log(x) - 2\log(2)$
(vii) $\log_3(x-1) - \log_9(x+1) = 0$
(viii) $1 + \log x = \log 10^5 - 3\log x$

EXERCICE 13

Déterminez les éventuelles solutions de :

1. $\log_7(x+5) - \log_{49} x = 0$
2. $\log(x+3) + \log(5-x) = 1 + \log(-x)$
3. $5^x + 3 \cdot 5^{2x} - 1 = 0$
4. $3 \cdot 10^x = 7^{3-x}$

EXERCICE 14

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

1. $y = \ln x$
2. $y = \log_5 x$
3. $y = \log_{1/5} x$
4. $y = \log_{\pi/4} x$
5. $y = \log(x - 4)$
6. $y = \log_{(3\pi-1)}(5 - x)$
7. $y = \log_{(e^2)}(3x + 7)$
8. $y = \ln x^2$
9. $y = \log(x^2 - 1)$
10. $y = \ln\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - 1\right)$

EXERCICE 15

Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

1. $a(x) = 2e^x + 13 - x^2$
2. $b(x) = 5 - 5^x + \frac{1}{5}\ln x$
3. $c(x) = xe^x$
4. $d(x) = 5^x(x + 1)$
5. $e(x) = e^x + \ln x$
6. $f(x) = \frac{e^x}{\log x}$
7. $g(x) = e^{5x}$
8. $h(x) = e^{3x^2}$
9. $l(x) = (x + \pi) \cdot e^{\pi x}$
10. $m(x) = 8x \cdot \pi^{x-\pi}$
11. $n(x) = \frac{x}{e^x}$
12. $p(x) = \frac{1-7x}{2^x}$
13. $r(x) = \ln(3 - 5x)$
14. $s(x) = -2\ln(x^2 + 5)$
15. $t(x) = \frac{\ln x}{x}$
16. $u(x) = \log(5x + \pi) \cdot e^{\pi x}$
17. $v(x) = \log_4(3 \cdot 2^{x-1}) - e^{2^{x+2}}$

EXERCICE 16

1. Calculez l'équation de la droite tangente au graphe de: $f(x) = x - \ln(x)$ en son point d'abscisse $x_0 = e^2$.
2. Calculez l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = x - \ln(4x)$ en son point d'abscisse $x_0 = e^2$.

EXERCICE 17

Déterminez la valeur réelle de k de manière à ce que la fonction $y = e^{-kx^2}$ ait un point d'inflexion en $x_0 = \sqrt{3}$.

EXERCICE 18

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}(x+2000)logx =$
2. $\lim_{x\to-\infty}(x+10)e^{x-10} =$
3. $\lim_{x\to+\infty}x^{10000}e^{x} =$
4. $\lim_{x\to0^+}(\ln(x/8))(e^{x}) =$
5. $\lim_{x\to0^+}(\ln((8-x)/8))(e^{x}) =$
6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^7-1)}{1{,}5^{2x}} =$
7. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{e^{x}} =$
8. $\lim_{x\to0}(3x-2)5^{3x} =$
9. $\lim_{x\to-\infty}-3x^2\pi^{-x} =$
10. $\lim_{x\to2^+}e^{\frac{-3}{x-2}} =$

EXERCICE 19

Déterminez le domaine de définition et les asymptotes verticales de : $h(x)=\frac{12}{4-e^{x}}$.

EXERCICE 20

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

$$f_1(x)=\frac{10}{5+e^{x}};\ \ f_2(x)=\frac{x-3e^{x}}{e^{x}-2}$$

1. Trouvez l'équation de l'asymptote verticale ;
2. Calculez la limite à l'infini ($-\infty\ et\ +\infty$), ensuite commentez le résultat en termes d'asymptotes.

EXERCICE 21

Pour chacune des fonctions suivantes :

i. déterminer le domaine d'existence ;
ii. déterminer les coordonnées des points d'intersection avec les axes ;
iii. dresser le tableau des signes ;
iv. calculer les limites et l'équation des éventuelles asymptotes;
v. dresser le tableau de croissance ;
vi. dresser le tableau de courbure ;
vii. esquisser le graphe.

$y = e^x$	$y = e^x - 1$	$y = e^x - x$	$y = x\,e^x$	$y = x^2 e^x$

EXERCICE 22

Établissez le tableau de croissance et celui de courbure de $f(x) = x - \ln(4x)$ et calculez les coordonnées de ses points de maximum, de minimum et d'inflexion (s'il y e n a).

EXERCICE 23

Établissez le tableau de croissance de : $f(x) = \frac{lnx}{x}$ et calculez les coordonnées de ses points de maximum, de minimum et d'inflexion (s'il y e n a).

EXERCICE 24

Soit f la fonction d'équation : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$. Déterminez son domaine d'existence et dressez son tableau de croissance.

EXERCICE 25

Étudiez les fonctions suivantes (domaine, zéros, signe, limites, asymptotes, croissance, courbure et esquisse du graphe):

1. $y = x + \ln(x)$
2. $y = x - \ln(x)$
3. $y = \frac{\ln(x)}{x}$
4. $y = x\ln(x) - x$
5. $y = \ln(x)^2$
6. $y = x\ln(x)$