Chapitre 1 : Exponentielle et Logarithme

Rappels sur les puissances

Exercice 1 : Compléter le tableau sans utiliser de calculatrice

5 au carré	2 au cube	1 a la puissance 4		- 5 au cube	
5^2			$(-2)^5$		
5×5	$2\times2\times2$				$(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$
25					

Exercice 2 : Calculer

a. $5^2\times5^4 = \mathbf{5^6}$	*b* $4^{-3}\times4^8 =$	*c.* $(-6)^{-7}\times(-6)^2 =$	*d* $(-3)^7\times(-3)^{-4} =$
e. $5^{-3}\times5^{-1}\times5^8 =$	*f.* $7^9\times7^{-8}\times7^{-3} =$	*g* $(-8)^2\times(-8)^{-5}\times(-8)^{-1}$	*h* $9^2\times9^{-1}\times9^{-7}\times9^{-4}=$
i. $\dfrac{5^7}{5^3} = \mathbf{5^4}$	*j.* $\dfrac{7^{-4}}{7^3} =$	*k* $\dfrac{(-6)^{-6}}{(-6)^{-1}} =$	*l.* $\dfrac{(-5)^6}{(-5)^{-16}} =$
m. $\dfrac{(-1)^{-12}}{(-1)^{-8}} =$	*n.* $\dfrac{23^{-14}}{23^{-21}} =$	*o.* $\dfrac{(-3)^{-9}}{(-3)^6} =$	*p.* $\dfrac{2^{-3}}{2^3} =$
q. $(3^{-2})^7 = \mathbf{3^{-14}}$	*r.* $((-5)^{-7})^{-1} =$	*s.* $((-2)^4)^{-3} =$	*t.* $(12^7)^3 =$
u. $(8^{-8})^8 =$	*v.* $((-9)^{-7})^{-2} =$	*w* $((-0,6)^{-11})^{-3} =$	*x* $(7^{-8})^0 =$

Exercice 3 : Considérons les deux fonctions définies par :

$$f:\Re^+\to\Re^+ \qquad g:\Re^+\to\Re^+$$
$$x\mapsto x^2 \qquad x\mapsto\sqrt{x}$$

1) Tracer les deux fonctions dans un même système d'axes.
2) Que pouvez-vous dire de ces deux fonctions?
3) Calculer $f(g(x))$.
4) Faire la même chose avec $y = x^3$ et $y = \sqrt[3]{x}$
5) Quelle généralité peut-on en déduire ?

Exercice 4 : Calculer sans machine (la calculatrice servira simplement à vérifier)

a) 2^{-1} b) 4^{-2} c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ e) $125^{-\frac{1}{3}}$ f) $0{,}125^{-\frac{1}{3}}$

g) $0{,}0001^{-\frac{3}{4}}$ h) $16^{-\frac{3}{4}}$ i) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ j) $3^{-2}\cdot 3^{5}$ k) $\frac{5^{-3}}{5^{-5}}$ l) $\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{2}$

Exercice 5 : Exprimer les expressions suivantes sous la forme a^n :

a) $\frac{1}{a}$ b) $\sqrt[3]{a}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt{\frac{a^2}{a^3}}$ e) $\frac{\left(a^2\right)^3}{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt{\left(a^3\right)^2}$

g) $\frac{1}{a^3\cdot a^5}$ h) $\frac{\sqrt[2]{a^3}}{a^{\frac{1}{2}}}$ i) $\left(\frac{a^5}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ j) $\left(a+a^2\right)^2$ k) $\left(a^2\cdot a^{-3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ l) $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

Exercice 6 : Mettre sous forme de puissance et simplifier:

a) $\frac{\sqrt{18}\cdot 2^3}{3^{\frac{1}{2}}}$ b) $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{2^{\frac{1}{2}}+2}$ c) $\frac{2^{-\frac{1}{3}}+2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}$ (d) $\frac{\sqrt{252}+7^{\frac{1}{2}}}{2^3-1}$)

Exercice 7 : Simplifier:

a) $\sqrt{2}-\sqrt{8}+\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\left(3-\sqrt{5}\right)^2-\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{720}$

c) $\left(5\sqrt{3}\right)^3-375\sqrt{3}$

d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)+\left(1-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{27}\right)$

Exercice 8 : **Exercice supplémentaire :** Simplifier les expressions suivantes

$a^{m-2}\cdot a^{3-m}=$

$\frac{\left(16x^4y^2\right)^n}{\left(4x^2y\right)^{2n-1}}=$

$a^{2n-9}\cdot a^{8-n}=$

$\frac{\left(27a^6b^3\right)^{n+1}}{\left(3a^2b\right)^{3n+3}}=$

$\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^4}}=$

$\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[3]{a^6}}=$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot\left(\sqrt[10]{a}\right)^4=$

Exercice 9 : Remplacer les lettres par des nombres pour que chaque égalité soit vraie :

a. $3^3 \cdot 3^x = 243$

b. $10^7 \cdot 10^x = 10$

c. $10 : 0{,}01 = 10^f$

d. $x^5 = 1$

e. $5^2 \cdot 5^x = 5^2$

f. $b^3 : b^0 = 216$

g. $4^{-3} : 4^{-5} = 4^k$

h. $(3^2 \cdot 3^1)^x = 3^6$

Exercice 10 : Représenter graphiquement les fonctions suivantes dans un même système d'axes : (pour des valeürs de x prises dans les nombres entiers relatifs!)

$f : x \to f(x) = 2^x$ $\quad g : x \to g(x) = 3^x$ $\quad h : x \to h(x) = 0{,}5^x$ $\quad m : x \to m(x) = 1^x$

A l'aide de ces représentations graphiques, résoudre les équations suivantes :

a. $2^x = 15$

b. $2^x = 0{,}5$

c. $2^x = -3$

d. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 15$

e. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.4$

g. $3^x = 10$

h. $3^x = \dfrac{1}{9}$

i. $3^x = \frac{1}{3}$

Exercice 11 : Calculer x

a) $2^x = 4\sqrt{2}$ $\quad$ b) $2^x = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{64}}$ $\quad$ c) $5^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{125}}$ $\quad$ d) $3^x\sqrt{3} = 9$ $\quad$ e) $2^x \cdot \sqrt[x]{64} = 32$

Exercice 12 : Sachant que le point P(4 ;9) se trouve sur la courbe d'équation $y = a^x$, calculer a.

Logarithme

Exercice 13 : Mettre les puissances sous forme logarithmiques et les logarithmes sous forme de puissance.

a) $15625 = 5^6$

b) $\log_3(9) = 2$

c) $\log_5\left(\frac{4}{100}\right) = -2$

d) $5 = \sqrt{25}$

e) $\log_2(8) = 3$

f) $16 = 2^4$

g) $\log_4(16) = 2$

Exercice 14 : Calculer x dans le cas suivant $7^x = 343$.

Exercice 15 : Calculer les logarithmes suivants, en utilisant exclusivement la définition du logarithme et ses conséquences immédiates.

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 27$

c) $\log_{12} 144$

d) $\log_{10} 10^{-3}$

e) $\log_{10} 0,01$

f) $\log_3(81)$

g) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

h) $\log_4(0{,}25)$

i) $\log_4(0{,}125)$

j) $\log_a(a^2 \cdot a^n)$

k) $\log_a(\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}})$

l) $\log_{a^2}\left(\frac{1}{a^3}\right)$

m) $\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} \cdot a^{-2}}\right)$

n) $\log 10$

o) $\log_{13}(1)$

p) $\log(0{,}001)$

q) $\log_{\frac{1}{2}}(32)$

Exercice 16 : Calculer x dans les cas suivants à l'aide de la calculatrice.

a) $x = \log_2(5)$

b) $x = \log_5(2)$

c) $\log_x(512) = 9$

d) $\log_x(1) = 0$

e) $\log_8(x) = 2$

f) $\log_2(x) = 3$

g) $4 = \log_x(81)$

h) $2 = \log_6(x)$

i) $x = \log_2(64)$

j) $5 = \log_x(32)$

k) $3 = \log_3(x)$

l) $x = \log_6(6^2)$

Exercice 17 : Exprimer les log des expressions suivantes en fonction de log a, log b et log c :

1) $0{,}1a^3bc^2$ 2) $\frac{a^2\sqrt{b}}{c}$ 3) $\sqrt[3]{a^5b^3c}$ 4) $\left(10a^2b^3\sqrt[3]{c^2}\right)^2$ 5) $\sqrt[3]{a^4b\sqrt{c}}$

Exercice 18 : Sachant que $\log_3 4 = 1.26185...$, $\log_3 5 = 1,46497...$ et $\log_3 7 = 1.77124...$, trouver, sans machine, les logarithmes des nombres suivants.

1. $\log_3(20) =$
2. $\log_3(16) =$
3. $\log_3(28) =$
4. $\log_3(25) - \log_3(35) =$

Exercice 19 : Exercice supplémentaire : On connaît $\log(2) = 0,30103$ et $\log(3) = 0,47712$

Sans utiliser la touche « log » de votre machine, mais en utilisant les propriétés de la fonction log, calculer:

1) $\log(6)$	2) $\log(4)$	3) $\log(9)$	4) $\log(8)$
5) $\log(\sqrt{3})$	6) $\log(\sqrt{2})$	7) $\log(30)$	8) $\log(300)$
9) $\log(30000)$	10) $\log(54)$	11) $\log(4,8)$	12) $\log\left(\frac{4}{3}\right)$
13) $\log(4,5)$	14) $\log(45)$	15) $\log\left(\frac{4}{9}\right)$	

Exercice 20 : Exercice supplémentaire : Sachant que $\log_2 3 = 1.58496...$, $\log_2 7 = 2.80735...$ et $\log_2 11 = 3.45943...$, trouver, sans machine, les logarithmes des nombres suivants.

1. $\log_2(21) =$
2. $\log_2(33) =$
3. $\log_2(49) =$
4. $\log_2(9) - \log_2(6) =$

Exercice 21 : Exercice supplémentaire : Résoudre les équations suivantes :

a) $\log_5 x = 3$
b) $\log_2 x = 0$
c) $\log_3 x = -3$
d) $\log_{0,5} x = -5$
e) $\log_x 16 = 2$
f) $\log_x 1 = 0$
g) $\log_2 (\log_2 x) = 0$
h) $\log_3 (\log_3 x) = 1$

Exercice 22 :

Résoudre les équations suivantes : 1) $400 = 300 \cdot 1{,}075^{n+2}$ 2) $25 \cdot 4^{x} = 15 \cdot 2^{-x}$

3) $\dfrac{10}{5^{x-1}} = 2{,}75$ 4) $\sqrt{8^{x}} = 2 \cdot 0{,}5^{x}$ (4) à faire sans log)

Exercice 23 :

Prouver : 1) $\forall x \in \Re_+^*$ $\log(x) + \log(1/x) = 0$

2) $\forall x \in \Re_+^*$ $\log(x^3) - \log(x^4) = -\log(x)$

Exercice 24 :

$\log(u) < 0 \Rightarrow u \in ?$

$\log(u) = 0 \Rightarrow u = ?$

$0 < \log(u) < 1 \Rightarrow u \in ?$

$\log(u) = 1 \Rightarrow u = ?$

$\log(u) > 1 \Rightarrow u \in ?$

Exercice 25 : Résoudre les équations suivantes :

a) $\log(x+2) - \log(3) = \log(2x-1) + \log(7)$

b) $log(x+2) + log(x-1) = log(18)$

c) $\log(2x-3) + \log(3x+10) = 4\log(2)$

d) $log_2(x^2-4) = 2log_2(x+3)$

e) $log_3(35-x^3) = 3log_3(5-x)$

Exercice 26 :

Résoudre (donner les solutions en valeurs exactes) : 1) $e^{2x} = 5$ 2) $\ln(x) = ½$

3) $\log_a(8) = ¾$ 4) $\log(4x-3) = -1$ 5) $e^{\ln(7)} = 3x + 1$

Exercice 27 :

Résoudre (solutions à donner en valeurs exactes :

1) $\ln(x+2) - \ln(x-1) = 1$ 2) $e^{3x} + e^{2x} - 12e^{x} = 0$

3) $2 \cdot 3^{n+4} = 5 \cdot 6^{n-7}$ 4) $\dfrac{\log(4x)}{\log(x+1)} = 2$

Exercice 28 : **Exercice supplémentaire** : Résoudre les équations suivantes :

a) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

b) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

c) $e^{\frac{6}{x}} = e^{x-1}$

d) $7^{2x-3} = 16807$

e) $3^{5x+4} = 9\sqrt{3}$

f) $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^{x} = 0$

g) $3^x + 9^x = 90$

h) $5 \cdot 5^{2x} + 14 \cdot 5^x - 3 = 0$

i) $e^x - 6e^{-x} = -1$

Exercice 29 : Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes et donner l'ensemble de définition :

a) $f(x) = \frac{2}{10^x - 9}$

b) $f(x) = \log_7\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$

c) $f(x) = \log(x^3 + 2x^2 - 3)$ (juste le domaine de définition)

d) $f(x) = \frac{1}{\log(x^2-1)}$

Exercice 30 : Trouver la limite de la fonction :

a) $y = \ln\left(x^3\right)$ en $+\infty$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$ en 0

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$

d) $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ en $+\infty$

e) $y = x \cdot e^x$ en $-\infty$

f) $y = \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$

g) $y = \left(e^{-x}\right)^2$ en $+\infty$

h) $y = x^2 e^{-x}$ en $+\infty$

i) $y = \left(x^2+1\right)\ln(x)$ en 0

j) $y = \left(x^2+2\right)e^x$ en $-\infty$

k) $y = \frac{2x-1}{x^3+2}\ln\left(x^2+1\right)$ en $-\infty$

l) $y = xe^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

Exercice 31 : Croissance bactérienne.

Le nombre de bactéries dans une culture au temps t (en heures) est donné par

$$Q = 2 \cdot 3^t$$

Où Q est mesuré en milliers.

1- Quel est le nombre de bactéries en t=0 ?
2- Calculer le nombre de bactéries après 10 min, 30 min et 1h
3- A partir de quel temps, le nombre de bactéries est-il égal à 54 milliers ?

Exercice 32 : La quantité Q résiduelle d'un certain médicament dans le corps après t heures est donnée par $Q = 5 \cdot 0{,}9^t$

1. Au bout de combien de temps ne reste-t-il plus que 1 mg ?
2. Combien reste-t-il de médicament au bout de 70min ?

Exercice 33 : **Exercice supplémentaire :** Escherichia Coli est une bactérie fréquente du tube digestif de l'homme et des animaux à sang chaud. La transmission à l'homme se fait par la consommation d'aliments contaminés. La croissance d'une population d'Escherichia Coli est donnée par la fonction :

$$Y_t = 10{,}2 \cdot 2{,}36^t$$

où Y_t est la densité de cellules après t heures.

1. Calculer la densité de bactéries au bout de 30 minutes.
2. Au bout de combien de temps arrive-t-on à une densité de 46 ?

Exercice 34 : **Exercice supplémentaire :** Une ville de 20'000 habitants perd le 3% de sa population chaque année. On considère que le nombre N d'habitants au bout de n années est donné par la fonction :

$$N = 20\ 000 \cdot 0{,}97^{n-1}$$

1. Combien restera-t-il d'habitants dans 5 ans ?
2. Déterminer au bout de combien d'année la population ne sera plus que de 12'000 habitants.

Exercice 35 : **Exercice supplémentaire :** Un industriel investit dans une machine dont le montant est de 20000 chf. Cette machine se déprécie de 20% tous les ans. On considère que la valeur V de la machine au bout de n années est donnée par la fonction $V = 20\,000 \times 0{,}80^{n-1}$. Déterminer au bout de combien d'année la machine aura une valeur de 12 000 chf.

Exercice 36 : Une population de bactéries comporte 10^5 individus. La population double son effectif toutes les 20 minutes.

a) Calculer la population au bout d'une heure, deux heures, une heure et 30 minutes.

b) Calculer la population au bout de x heures.

c) En combien de temps (heure, minutes et secondes) est-elle multipliée par 20? par 1'000?

d) En combien de temps augmente-t-elle de 15% ?

Exercice 37 : Une population compte 1800 habitants. Celle-ci augmente de 3% chaque année. Quelle sera la population après 123 ans ?

Exercice 38 : Une population compte 6700 habitants. Après 25 ans, elle en compte 9095. Quel est le taux de croissance en % ?

Exercice 39 : Un objet augmente du quart de son prix chaque année. Après combien de temps aura-t-il doublé de prix ?

Exercice 40 :

1. Si l'on place un capital de 6 000 frs à la banque au taux de 5%, combien obtient-on après 6 ans ?
2. Au bout de combien d'années pourrait-on acheter une voiture de 15 000 frs ?

Exercice 41 : 1 franc est placé à la banque en 1900 au taux annuel de 4%.

1. Quel capital y a-t-il un siècle plus tard, c'est-à-dire en l'an 2000 ?
2. Après combien d'années le capital aura atteint 1000 francs ?

Exercice 42 : Après combien d'années un capital C aura-t-il doublé au taux de 4% ? Même question, mais avec un taux de 3%.

Exercice 43 : A quel taux doit-on placer un capital de 1200 francs pour qu'il double en 12 ans ? Même question, mais pour un capital de 3000 francs.

Exercice 44 : Après avoir placé un capital C pendant 8 ans à 3%, nous obtenons une somme de 12'345 francs. Quel était le capital initial ?

Exercice 45 : Quelle est l'augmentation en% d'un capital placé pendant 6 ans à 3,5% ?

Exercice 46 : Si 1000 francs sont investis au taux de 12% par an, calculer le capital après 1 mois, 6 mois, 1 an et 20 ans.

Exercice 47 : Ile de Manhattan

L'île de Manhattan a été vendue 24 francs en 1626. A combien se monterait cette somme en 1996 si elle avait été investie à 6% par an.

Exercice 48 : Si aujourd'hui, j'ouvre un compte à la banque et dépose immédiatement 150 francs., combien de temps devrais-je attendre pour pouvoir m'acheter une voiture à 35'000 francs. Si le taux d'intérêt est de 2,5 % ? (réponse en année et en mois)

Exercice 49 : La dépréciation annuelle d'une voiture est de 9%. Si le coût initial de la voiture est de 40'000 frs, quelle est sa valeur au bout de 9 ans ?

Exercice 50 : Exercice supplémentaire :

a. On dépose une somme de 100'000 francs au taux de 2%. Combien pourra-t-on retirer après 10 ans ? (121899.44frs)
b. Dans combien d'années un certain capital déposé à un taux d'intérêt de 5% triple-t-il de valeur ? (n=22.52 ans)
c. Quel a été le taux d'intérêt offert par la banque si ayant placé la somme de 25'000 francs on a obtenu la somme de 48'697 francs après 17 ans ? (4%)

Exercice 51 : Exercice supplémentaire :

1. A quel taux est placé un capital de 2400 francs qui, placé du 27 février 2002 au 27 juillet 2002, rapporte un intérêt de 35 francs. (3.5%)
2. Le 1-er janvier 1990, vous empruntez une somme de 5000 francs à 4,5%. Que devrez-vous rembourser le 31 décembre 2002 ? (8860.98frs)
3. Combien d'années devez-vous placer un capital, placé à 4%, pour qu'il triple ? (28 ans)

Exercice 52 : Exercice supplémentaire :

Yvonne désire placer 40'000 francs à la banque.

1. A quel taux d'intérêts doit-elle placer son capital pour qu'il double en 20 ans ? (3.5%)
2. Si Yvonne avait placé son argent à un taux de 3,25%, quel aurait été sa fortune après 15 ans ? (64626.54 frs)
3. Combien d'années devrait-elle placer ce capital à 4% pour qu'il triple ? (28 ans)

Exercice 53 : Exercice supplémentaire : Un capital de 1'000'000 francs est placé à la BCN durant 4 ans et 6 mois à 4, 3 %. Vous retirez ensuite le capital obtenu pour le placer à l'UBS au taux de 5, 6 %. Combien d'années devez-vous attendre pour qu'il atteigne la somme de 1'400'000 francs ?

Réponse : n = 2,69

Exercice 54 : Exercice supplémentaire :

1. A quel taux est placé un capital de 2400 francs, qui placé du 27 février 2003 au 27 juillet 2003 rapporte un intérêt de 35 francs ? (*t=3,5%)*
2. Le 1er janvier 1990, vous empruntez une somme de 5000 francs à 4,5 %. Que devrez-vous rembourser le 31 décembre 2004 ? (*9259.72 frs)*
3. Combien d'années devez-vous placer un capital à 2 % pour qu'il triple ? (*n=55,48 ans)*
4. Quel a été le taux d'intérêt offert par la banque si ayant placé la somme de 35'000 francs on a obtenu la somme de 73'217 francs après 30 ans ? (intérêts composés). (*t=2,5%*)

Exercice 55 : Exercice supplémentaire : A partir du 1-er janvier 1967 jusqu'au 1-er janvier 2015, vous placez x fois 1000 francs au taux de 2,15%. Chaque 1-er janvier donne lieu à un versement.

1. Déterminer le nombre de versements.
2. Le 1-er janvier 2015 au soir, vous allez retirer la totalité de l'argent avec les intérêts.
   Quelle somme aurez-vous ?

Réponse : 1. x=49

2. J'obtiens 85387,44 frs

Exercice 56 : **Exercice supplémentaire :** En 1848, une banque neuchâteloise offre aux citoyens de la République la possibilité de placer Fr. 1000.- à un taux annuel de 3 % (intérêts composés) à condition que rien ne soit retiré avant la commémoration des 200 ans de la République en 2048. Il est clair que le retrait se fera par un des descendants de l'épargnant.

Auguste profite de cette offre et place Fr. 1000.-.

1. Calculer la valeur de ce placement à l'occasion de l'anniversaire des 150 ans de la République (en 1998).

En 1898, la même banque offre, à l'occasion des 50 ans de la République, la possibilité de placer Fr. 100.- à un taux annuel de 6 % (intérêts composés) à condition que rien ne soit retiré avant les 200 ans de la République (en 2048 !). Il est clair que le retrait se fera par un des descendants de l'épargnant.

Bernard profite de cette offre et confie Fr. 100.- à la banque.

2. Calculer la valeur de ce placement à l'occasion de l'anniversaire des 150 ans de la République (en 1998).

Réponse : 1. On obtiendra 84252.67 frs

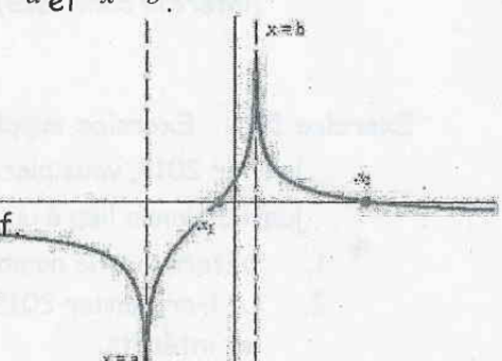
2. On obtiendra 33930.2 frs

Dérivées d'exponentielle et logarithme - Etude de fonctions

Exercice 57 : Soit la fonction $y = f(x)$ dont le graphe est représenté ci-contre.

Les zéros sont en x_1 et en x_2 alors que les AV sont en $x = a$ et $x = b$.

Ici $a = -7$, $b = \frac{3}{2}$, $x_1 = -\frac{4}{3}$ et $x_2 = 10$.



a. A partir du graphe, établir le tableau de signe de f.

b. A partir du graphe, établir le tableau de croissance de f.

c. A partir du graphe, établir le tableau de courbure de f.

Exercice 58 : Calculer les dérivées suivantes par rapport à x. Mettre le résultat sous une forme appropriée à une étude des signes de la dérivée.

1) $f(x) = \ln(3x)$
2) $f(x) = e^{x}(1-x)$
3) $f(x) = e^{-x}$
4) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$
5) $f(x) = e^{x}\cos(2x)$
6) $f(x) = e^{x^2-2x}$
7) $f(x) = \dfrac{x^5}{e^{x-1}}$
8) $f(x) = \ln(e^{x})$

Exercice 59 : Etudier le signe de la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{2-x}{x}e^{-x}$.

Exercice 60 : Calculer la dérivée de $y = 3^x$ par un calcul détaillé

Exercice 61 :

Etudier la croissance de la fonction $y = x^2 e^{3x}$.

Exercice 62 :

Etudier la courbure de la fonction $y = (2x-1)e^{-x}$.

Exercice 63 : Faire l'étude complète de la fonction : $f(x) = \ln(x)$

1) Domaine de définition.
2) Signe de la fonction.
3) Asymptotes.
4) Intersections avec Ox et Oy.
5) Croissance (Dérivée, zéro de la dérivée et tableau de variations).
6) Courbure.
7) Equation de la tangente en $x = 1$.
8) Représentation graphique de f et de la tangente.

Exercice 64 : Exercice supplémentaire : Calculer les dérivées suivantes par rapport à x.

1) $f(x) = \ln(5x)$ 2) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^3}$ 3) $f(x) = \ln\left(e^{3x}\right)$

4) $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x\right)$ 5) $f(x) = x\ln(7 - x)$ 6) $f(x) = 2\ln\left(\sqrt{x}\right)$

Exercice 65 : Exercice supplémentaire :

Dériver et factoriser 1) $y = x^3 \ln(x)$ 2) $y = \dfrac{3\ln(x)}{x^2}$ 3) $y = e^{½ x} \ln(4x)$

Par un calcul détaillé montrer que $y = \log_5(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln(5)}$

Exercice 66 :

La fonction $f(x) = (x - k)\, e^{-x}$ possède un point à tangente horizontale en $x = 2$.

1) Calculer k.
2) Déterminer la nature de ce point (max, min ou p.i.).

Exercice 67 :

a) Prouver que pour toutes valeurs de a, la fonction $y = (2x^2 + ax)e^{-x}$admet deux points à tangente horizontale.
b) Calculer a, de manière à ce que la tangente au graphe en x = 0 soit la droite y = 3x.

Exercice 68 :

Soit les deux fonctions $f(x) = e^{-2x}$ et $g(x) = e^{x+3}$.

a) Trouver le point d'intersection des graphes f et g.
b) Calculer l'angle que forment les graphes de f et de g en leur point d'intersection.

Exercice 69 : Faire l'étude complète de la fonction : $f(x) = e^{2-\frac{1}{2}x}$

1) Domaine de définition.
2) Signe de la fonction.
3) Asymptotes.
4) Intersections avec Ox et Oy.
5) Croissance (Dérivée, zéro de la dérivée et tableau de variations).
6) Courbure.

Exercice 70 : **Exercice supplémentaire :** Considérons la fonction : $f(x) = e^{-x^2}$

1) Domaine de définition.
2) Asymptotes.
3) Intersections avec Ox et Oy.
4) Croissance (Dérivée, zéro de la dérivée et tableau de variations).
5) Courbure.
6) Représentation graphique.

Exercice 71 : Considérons la fonction : $f(x) = 4x + 1 - 2e^{x}$

1) Domaine de définition.
2) Asymptotes.
3) Intersections avec Oy.
4) Croissance (Dérivée, zéro de la dérivée et tableau de variations).
5) Courbure.
6) Représentation graphique.

Exercice 72 : **Exercice supplémentaire :**

Pour $f(x) = x^n e^x$ résoudre $f'(x) = 0$, puis $f''(x) = 0$.

Exercice 73 :

La courbe $y = e^{-kx^2}$ possède un point d'inflexion en $x = 1$.
Chercher la valeur de k.

Exercice 74 : Pour $f(x) = (x + p)e^x$ chercher le lieu géométrique du ou des minimums de f. Idem avec les points d'inflexion.

Exercice 75 :

Pour $y = 3x \ln(2x)$ résoudre $y' = 0$.
Idem avec $y = x^4 \ln(x)$

Exercice 76 : Considérons la fonction : $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-2}{x-6}\right)$

a. Domaine de définition.

b. Calculer le(s) zéro(s) de f.

c. Asymptotes verticales ?

d. Asymptotes non-verticales ?

e. Calculer $f'(x)$.

f. Représentation graphique.

Exercice 77 : **Exercice supplémentaire**

Chercher l'asymptote horizontale et le comportement de la fonction $y = \ln \dfrac{4x+2}{x-1}$

Exercice 78 : Soit $f(x) = x \cdot \ln(x^2)$

1) Etudier la fonction f (Avec courbure et éventuelles asymptotes)

2) Calculer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = e$.

Exercice 79 : **Exercice supplémentaire :**

Faire l'étude complète de la fonction : $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

1) Domaine de définition.

2) Asymptotes.

3) Intersections avec Ox et Oy.

4) Croissance (Dérivée, zéro de la dérivée et tableau de variations).

5) Courbure.

6) Représentation graphique.

Exercice 80 :

La fonction $f(x) = \ln(x^2 + bx + c)$ possède un minimum qui est le point $(-3 ; 0)$.
Chercher b et c.

Exercice 81 :

Montrer que pour la courbe $y = \ln(x^2 - 4x)$ les droites tangentes en $x = 2 + t$ et $x = 2 - t$ sont de pentes opposées $(t > 0)$.