LJP: Exponentielles - Logarithmes

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes :

$a^{m-2} \cdot a^{3-m} =$

$$\frac{\left(16x^4y^2\right)^n}{\left(4x^2y\right)^{2n-1}} =$$

$\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^4}} =$

$\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^6}}} =$

Exercice 2

Calculer :

$\log_2(64) =$	$\log_2(1024) =$	$\log_5(125) =$
$\log(10) =$	$\log_4(256) =$	$\log_3(243) =$
$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) =$	$\log_4(0{,}015625) =$	$\log_5(0{,}008) =$

Exercice 3

Exprimer les log des expressions suivantes en fonction de log(a), log(b) et log (c) :

1) $0{,}1a^3bc^2$ 2) $\frac{a^2\sqrt{b}}{c}$ 3) $\sqrt[3]{a^5b^3c}$

4) $\left(10a^2b^3\sqrt{c^2}\right)^2$ 5) $\sqrt[3]{a^4b\sqrt{c}}$ 6) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$

Exercice 4

Donner le résultat, sans employer la calculatrice :

1) $\log_6(18) + \log_6(2) =$

2) $\log_2(24) - \log_2(3) =$

3) $\log(2) + \log(5) =$

4) $2\log(20) - \log(4) =$

5) $\log(90) + \log(4) - 2\log(6) =$

6) $-2\log(5) - 2\log(2) =$

Exercice 5

Donner les ensembles de définition, puis esquisser les graphes des fonctions suivantes :

$y = 2^x$ $\quad$ $y = \log_2(x)$ $\quad$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad$ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

1) $\log(x) = 9$
2) $\log(x) = 1 + \log(7)$
3) $\log(x+1) = 3$
4) $\log_x(2) = 3$
5) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$
6) $8^{4x+1} = 1$
7) $5^{3x+1} - \frac{1}{25} = 0$
8) $2^{3x+4} = 45$
9) $\log_2(81) = x$
10) $\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 2$
11) $\log(2x) + 3 = 2\log(x)$
12) $7^{x+1} = 5 \cdot 3^x$
13) $\log(x^2 + x) = 0$
14) $\log(3x-4) + \log(10x-4) = 2\log(5x-2)$
15) $\ln(x+1) - \ln(2-x) + \ln 2 = \ln 7 - \ln(4-x)$
16) $\mathrm{llog}\left(\sqrt{7x+5}\right) + \log\left(\sqrt{2x+3}\right) = 1 + \log(4{,}5)$
17) $e^{2x} + e^x = 6$
18) $3e^{4x} - 5e^{2x} = 0$
19) $2e^{6x} + 5e^{3x} - 3 = 0$

Exercice 7

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $y = e^{2x}$ $\quad$ b) $y = xe^x$ $\quad$ c) $y = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ d) $y = x^2e^x$ $\quad$ e) $y = e^{\sin(x)}$ $\quad$ f) $y = xe^{x^2}$

g) $y = \ln(2x)$ $\quad$ h) $y = x \cdot \ln(x)$ $\quad$ i) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$ j) $y = x^2 \cdot \ln(x)$

k) $y = \ln(x^2)$ $\quad$ l) $y = \ln(e^x)$ $\quad$ m) $y = e^x \cdot \ln(x)$ $\quad$ n) $y = \ln(6x^3 - 3x^2 - 7)$

Exercice 8

Pour quelles valeurs de x les expressions suivantes ont-elles un sens ?

$\ln(x^2)$ $\ln(x^2+1)$ $\ln(x-3)$ $\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\dfrac{1}{\ln(x)}$

Exercice 9

Trouver la limite de la fonction :

a) $y = \ln(x^3)$ en $+\infty$

b) $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 0

c) $y = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en $+\infty$

d) $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ en $+\infty$

e) $y = x \cdot e^x$ en $-\infty$

f) $y = \dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$

g) $y = \left(e^{-x}\right)^2$ en $+\infty$

h) $y = x^2e^{-x}$ en $+\infty$

i) $y = (x^2+1)\ln(x)$ en 0

j) $y = (x^2+2)e^x$ en $-\infty$

k) $y = \dfrac{2x-1}{x^3+2}\ln(x^2+1)$ en $-\infty$

l) $y = xe^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

m) $y = e^{\frac{x^2}{x^3-3x+4}}$ en $-\infty$

n) $y = e^{-x^2} \cdot (x^2-12x+3)$ en 0

Exercice 10

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

1) $y = (x+1) \cdot e^x$ 2) $y = \dfrac{e^{2x-1}}{x+3}$ 3) $y = x^2 \cdot e^{-x}$ 4) $y = \ln(x^2)$

5) $y = \dfrac{20 \cdot e^{-2x}}{(x-3)^2}$ 6) $y = 2e^x - e^{2x}$ 7) $y = \ln(x^2-x-2)$

Exercice 11

a) Prouver que pour toutes valeurs de a, la fonction $y = (2x^2 + ax)e^{-x}$ admet deux points à tangente horizontale.

b) Calculer a, de manière à ce que la tangente au graphe en x = 0 soit la droite y = 3x.

Exercice 12

Soit les deux fonctions $f(x) = 4e^{-2x}$ et $g(x) = e^{x+3}$.

a) Trouver le point d'intersection des graphes f et g.

b) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'intersection calculé en a).

Exercice 13

En 1945, une population comptait 100 000 habitants. Elle n'en compte plus que 50 000 en 1990.
Déterminer le taux de décroissance (supposé constant et annuel) de cette population.

Exercice 14

Une forêt s'étend exponentiellement. Elle occupe aujourd'hui 72 342 m^3.
Son taux d'accroissement annuel est de 3,4%.

a) Quel volume occupera-t-elle dans 8 ans ?

b) Dans combien d'années occupera-t-elle 100 000 m^3 ?

c) Quel volume occupait-elle il y a 15 ans ?

Exercice 15

Une population diminue chaque année de 5%.
Combien d'années faut-il pour que cette population soit réduite de moitié ?

Exercice 16

Tant qu'il y a assez de nourriture, la population d'une culture de bactéries croît proportionnellement à la quantité de bactéries présentes. Le nombre de bactéries au début d'une expérience est égale à 100 et leur nombre double chaque heure.

1) Combien y aura-t-il de bactéries deux heures et demie après le début de l'expérience ?

2) Au bout de combien de temps la population sera-t-elle de 100000 bactéries ?

Exercice 17

Un médicament est éliminé du corps par l'urine.
On sait que, pour une dose de 10 milligrammes, la quantité A restante dans le corps n heures après la prise est donnée par : $A = 10 \cdot 0{,}8^n$.

a) Quelle est la perte, en %, après une heure ?

b) Déterminer après combien de temps il reste 2 mg dans le corps. (Donner la réponse sous la forme ___h___min___s).

D'un autre médicament, on suppose que le corps en élimine la moitié en 2h30.

c) Quel pourcentage en élimine-t-il en une heure ?

Exercice 18

a) Une population de bactéries double en 1 h. Après combien de temps cette population sera-t-elle 10 fois plus grande ?

b) Quel doit être le taux de croissance d'une population (supposé constant) pour qu'elle quadruple en 80 ans ?

Exercice 19

Une substance radioactive se désintègre à une vitesse proportionnelle à la quantité de matière présente. Si le 30 % d'une telle substance se désintègre en 15 ans, quelle est la demi-vie de la substance ? (la demi-vie est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la matière).

Exercice 20

On compare l'état de santé de deux forêts :

- La forêt A est saine, avec un taux d'accroissement annuel de 3,2 %. Le 1er janvier 1998, le volume total de bois a été évalué à 55 000 m^3.

- La forêt B est malade et dépérit. Le 1er janvier 2001, le volume de bois était de 90 000 m^3, mais diminuait de 2,3 % par an.

En quel mois de quelle année, le volume de bois des deux forêts sera-t-il identique ?

Exercice 21

La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de 1000 personnes. On admet que le nombre N de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est donné par $N(t)=\dfrac{1000}{1+999\cdot 10^{-0,17t}}$.

1) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

2) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

Exercice 22

Le son le plus faible qu'une oreille humaine puisse percevoir est celui provoqué par une source de puissance $P_0=10^{-12}$ Watt.

En décibels, le niveau sonore N d'un son de puissance P Watt est défini par $N=10\log\left(\dfrac{P}{P_0}\right)$

1) une conversation normale correspond à une puissance sonore de 10^{-6} Watt. Calculer son niveau sonore.

2) Par quel facteur la puissance d'une source sonore est-elle multipliée lorsque son niveau passe de 60 dB à 90 dB ?

3) Un niveau sonore supérieur à 90 dB est considéré comme nuisible pour les oreilles. La puissance sonore perçue à 100 m d'un avion au décollage est de 1 Watt. Ce son est-il nuisible ?

4) Si le niveau sonore de chacune de deux sources est de 45 dB, quel est le niveau sonore de la réunion de ces deux sources ?