TEST 2

EXERCICE 1

$p(z) = z^3 + 5z^2 + 4z + a \quad (a \in \mathbb{R}) \quad z_1 = 2i$

$P(2i) = 0 \Leftrightarrow (2i)^3 + 5(2i)^2 + 4(2i) + a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{-8i} - 5 \cdot 4 + \cancel{8i} + a = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 20}$

$p(z) = z^3 + 5z^2 + 4z + 20$

Comme les coefficients du polynôme sont réels la 2ème solution est $\overline{z}_1 = -2i$. On peut ecrire alors le $p(z)$

$p(z) = (z - 2i)(z + 2i)\, Q(z) = (z^2 + 4)\, Q(z)$

On effectue la division euclidienne.

$$
\begin{array}{rl|l}
& z^3 + 5z^2 + 4z + 20 & z^2 + 4 \\
& -z^3 \qquad\quad - 4z & z + 5 \\
\hline
& 5z^2 \qquad + 20 & \\
+ & -5z^2 \qquad - 20 & \\
\hline
& 0 &
\end{array}
$$

Donc $p(z) = (z^2 + 4)(z + 5)$ et les racines sont $z_1 = 2i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = -5$

EXERCICE 2

$f(z) = \dfrac{1}{z} \qquad f(x + iy) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$f(r\,cis\varphi) = \dfrac{1}{r}\, cis(\varphi)$

a) $y = 4x$

$u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$y = 4x \quad u = \dfrac{x}{17x^2} = \dfrac{1}{17x} \qquad v = \dfrac{4x}{17x^2} = \dfrac{4}{17x}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{17u} \qquad x = \dfrac{4}{17v}$

Donc $\dfrac{1}{\cancel{17}u} = \dfrac{4}{\cancel{17}v} \Leftrightarrow v = 4u$

Alors l'image de la droite $y=4x$ par la fonction f est elle-même càd la droite $y=4x$.

b) $y=-4 \quad u=\frac{x}{x^2+16} \quad v=\frac{-4}{x^2+16}$ *

Donc $u^2=\frac{x^2}{(x^2+16)^2}$, et $v^2=\frac{16}{(x^2+16)^2}$

$\frac{u^2}{v^2}=\frac{x^2}{16} \Leftrightarrow x^2=\frac{16u^2}{v^2}$

On remplace en (*)

$\cancel{v}=\frac{-4}{\frac{16u^2}{\cancel{v^2}}+16}=\frac{-4v^{\cancel{2}}}{16u^2+16v^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16u^2+16v^2=-4v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^2+v^2+\frac{1}{4}v=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^2+(v+\frac{1}{8})^2-\frac{1}{64}=0 \Leftrightarrow u^2+(v+\frac{1}{8})^2=\frac{1}{64}$

Donc l'image de la droite $y=-4$ est le cercle du centre $(0;-\frac{1}{8})$ et du rayon $r=\frac{1}{8}$

EXERCICE 3

$f(z)=i\overline{z^2}$

a) $z_1=2-i \quad f(2-i)=i\overline{(2-i)^2}=i\overline{(4-1-2i)}=$

$=i(\overline{3-2i})=i(3+2i)=-2+3i$

b) $f(x+yi)=i\overline{(x+iy)^2}=i\overline{(x^2-y^2+2xyi)}=$

$=i(x^2-y^2-2xyi)=2xy+(x^2-y^2)i$

Donc $u=2xy \quad v=x^2-y^2$

c) $y=-3 \quad u=-6x \quad v=x^2-9$

$x=-\frac{u}{6} \quad v=\frac{u^2}{36}-9$

Donc l'image est la parabole

$y=\frac{1}{36}x^2-9$

EXERCICE 4

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

a) $D_f = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$u = \frac{x^2 - x + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \qquad v = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$$

b) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(f(z)) = 1 \}$

$Re(f(z)) = 1 \Rightarrow u = 1 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - x + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2}$

$\Leftrightarrow x = 1$

Alors le A est l'ensemble des points de la droite $x=1$ privè le point $(1,0)$

c) $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid 2 \cdot Re(f(z)) = Im(f(z)) \}$

$2u = v \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2y^2 = -y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + \frac{1}{2} y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow$

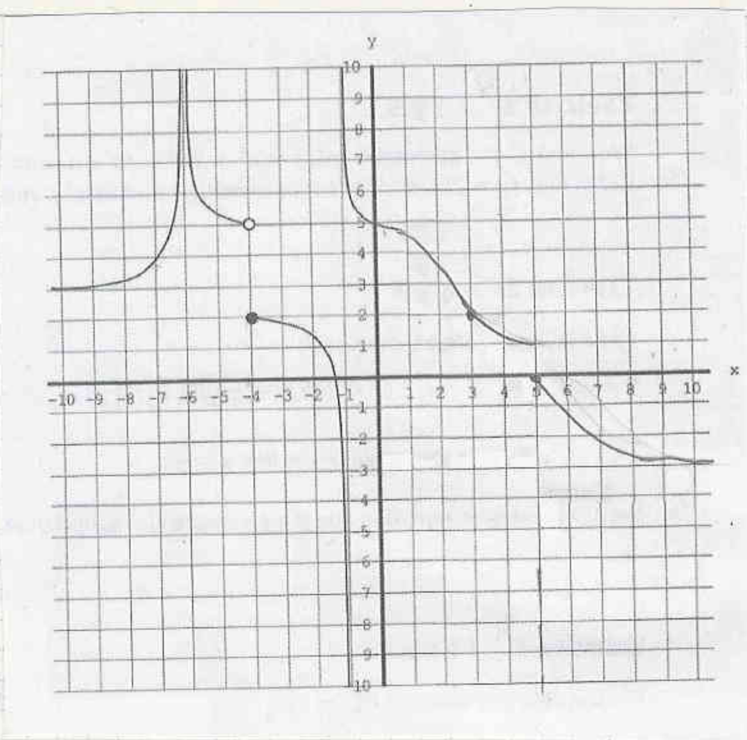
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$

Alors c'est le cercle du centre $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$ et du rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$

EXERCICE 5

$\cdot \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 \qquad \lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 5 \qquad \lim\limits_{x \to -6} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5 \qquad f(-4) = 2$



c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-6 ; -1\}$

EXERCICE 6

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 7x^3 - 4x^2 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(6x-2)^2}{2x^2-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{36x^2 - 24x + 4}{2x^2 - 8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{36\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = 18$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(6x-2)^2}{2x^2-8} = \text{"}\frac{100}{0}\text{"}$ $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2x^2-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 7

a) $f(x) = \frac{3(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-5)}$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2 ; 5\}$
- AV: $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3(x+1)}{x-5} = \frac{9}{-3} = -3$

Hole $(2 ; -3)$

$x = 5$ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \text{"}\frac{18}{0}\text{"} = \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

AV $\underline{x = 5}$

AH: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$ AH: $y = 3$

b) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

- $\cos x \to$ fonction paire
- $T = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$
- $R_f = [-1, 1]$

c) $D =]-2 ; +\infty[\setminus \{3\}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}\,(x-3)}$