TEST 1 (NOMBRES COMPLEXES)

1. $2z - 3\bar{z} = 5 - 2i$ Soit $z = x + yi$

$\Leftrightarrow 2(x+yi) - 3(x-yi) = 5 - 2i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 2yi - 3x + 3yi = 5 - 2i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x + 5yi = 5 - 2i \Leftrightarrow x = -5$

$5y = -2 \Leftrightarrow y = -2/5$

Alors $\underline{z = -5 - \frac{2}{5}i}$

2. $z \cdot \bar{z} + 1 = 5 \Leftrightarrow$ (On sait que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$

Cercle ; centre $(0,0)$ rayon $= 2$

3. $Re(i\bar{z}) = 2 \Leftrightarrow Re(i(x-yi)) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Re(y + xi) = 2 \Leftrightarrow \underline{y = 2}$ Droite $// Ox$

4. On peut considérer une rotation d'angle 180 autour de $z_0 = -i$

Alors $f(z) = az + b$ avec

$a = 1 \cdot cis(180) = -1$ et $b = z_0(1-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = -i(1+1) \Leftrightarrow b = -2i$.

Alors $\underline{f(z) = -z - 2i}$

5. $f(z) = (-3+4i)z + 6$

· Rotation d'angle $\arg(-3+4i)$ autour de $z_0 = \frac{6}{1-(-3+4i)} = \frac{6}{4-4i} = \frac{6(4+4i)}{32} = \frac{3(4+4i)}{16} =$

$= \frac{3(1+i)}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i = z_0$

$\arg(-3+4i)$: $\tan\varphi = -\frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = 126.87°$

$R(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i, 126.87°)$

· Puis homothétie de centre z_0 de rapport $|-3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$

$H(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i; 5)$

6. $z^5 = 7 + 24i$ $|7+24i| = 25$ $\arg(7+24i) = 73{,}74$

$z^5 = 25\, cis(73.74)$

$z = \sqrt[5]{25}\left(\frac{73.74}{5} + k\frac{360}{5}\right)$ $k = 0, \dots, 4$

$z_k = \sqrt[5]{25}\ cis(14.75 + k\,72) \quad k = 0, \ 4$

$z_0 = 1.84 + 0.48i \qquad z_3 = 1.03 - 1.6i$

$z_1 = -1.2 - 1.47i \qquad z_4 = -1.77 + 0.69i$

$z_2 = 0.11 + 1.9i$

Evidement la plus courte distance pour l'axe Oy est ≈ 0.11

7. $\dfrac{-i\ \overline{4\,cis(20^\circ)}}{(2\,cis(40^\circ))^3} = \dfrac{-4i\ cis(-20)}{8\ cis(3\cdot 40)} = -\dfrac{1}{2}\, i\ cis(-20-120)$

$= -\dfrac{1}{2}\, i\, cis(-140) = -\dfrac{1}{2}\, i\,(\cos(-140) + i\sin(-140)) =$

$= -\dfrac{1}{2}\, i\,(\cos(140) - i\sin 140) = \dfrac{1}{2}(-\sin 140 - i\cos 140)$

$= \dfrac{1}{2}(\sin(-140) + i\cos(-140)) = \dfrac{1}{2}(\cos(90+140) + i\sin(90+140))$

$= \dfrac{1}{2}(\cos(230) + i\sin(230)) = \dfrac{1}{2}\, cis(230)$