

Exercice 1

a) $(3+2i)z-5i=iz+2-i \Leftrightarrow (3+i)z=2+4i \Leftrightarrow z=\frac{2+4i}{3+i}$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2+4i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}=\frac{10+10i}{10}=1+i$$

b) $z^2-5-12i=0 \Leftrightarrow z^2=5+12i$, on pose $z=x+yi \Rightarrow z^2=x^2-y^2+2xyi$,

$$\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=12 \end{cases}, y=\frac{6}{x} \Rightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=5 \Rightarrow x^4-5x^2-36=0 \Rightarrow x^2=\frac{5 \pm 13}{2},$$

$$x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \text{ d'où les solutions } z_1=3+2i \text{ et } z_2=-3-2i$$

c) $iz^2-(2+4i)z+4+2i=0$, $\Delta=-12+16i-16i+8=-4$,

$$\Rightarrow z=\frac{2+4i \pm 2i}{2i}=\frac{1+2i \pm i}{i} \text{ d'où } z_1=\frac{1+3i}{i}=3-i \text{ et } z_2=\frac{1+i}{i}=1-i$$

d) $3z+2i\bar{z}=10-5i$, on pose $z=x+yi \Rightarrow 3(x+yi)+2i(x-yi)=10-5i$,

$$\Leftrightarrow 3x+2y+(2x+3y)i=10-5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=10 \\ 2x+3y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=8 \text{ et } y=-7$$

$$\text{donc } z=8-7i$$

Exercice 2

$(-1+2i)z+(1+2i)\bar{z}+2i=0$, on pose $z=x+yi$,

$$(-1+2i)(x+yi)+(1+2i)(x-yi)+2i=0$$

$$\Leftrightarrow -x-yi+2xi-2y+x-yi+2xi+2y+2i=0 \Leftrightarrow (4x-2y+2)i=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+1=0 \text{ ou encore } y=2x+1, \text{ c'est donc une droite.}$$

Exercice 3

$$f(z)=3iz+2-6i$$

a) $f(z)=z \Leftrightarrow (-1+3i)z=-2+6i \Leftrightarrow z=2$

b) Une rotation de 90° suivie ou précédée d'une homothétie de facteur 3, les deux de centre $(2;0)$, ou alors de centre

$$O, \text{ et suivies d'une translation d'amplitude } \vec{t}=\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c) $f(x+yi)=3i \cdot (x+yi)+2-6i=-3y+2+(3x-6)i$,

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x=2$$

d) $f(yi)=3i \cdot (yi)+2-6i=-3y+2-6i=u+vi$ avec $u=-3y+2$ et $v=-6$,

$$\text{l'image de l'axe imaginaire est la droite horizontale } v=-6 \text{ ou } y=-6.$$

