

Exercice 1

$$f(z) = 2iz^2$$

a) $f(z) = 0 \Rightarrow z = 0$

b) $2iz^2 = z \Rightarrow z \cdot (2iz - 1) = 0$ d'où $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{1}{2}i$

c) $2iz^2 = -24 - 10i \Rightarrow z^2 = -5 + 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$,
d'où $x^2 - y^2 = -5$ et $2xy = 12 \Rightarrow y = \frac{6}{x} \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-5 \pm 13}{2} = 4 \text{ (ou } -9\text{)}. \text{ Finalement } z_1 = 2 + 3i \text{ et } z_2 = -2 - 3i$$

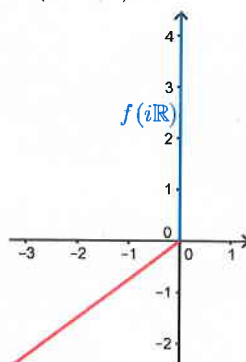
d) $f(x + yi) = 2i(x + yi)^2 = 2i(x^2 - y^2 + 2xyi) = -4xy + 2(x^2 - y^2)i$

On a donc $u = -4xy$ et $v = 2(x^2 - y^2)$

e) $y = 0 \Rightarrow u = 0$ et $v = 2x^2$. On déduit $f(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$
(la partie positive de l'axe imaginaire)

f) $y = 2x \Rightarrow u = -8x^2$ et $v = -6x^2$, donc

$$3u - 4v = 0 \Leftrightarrow v = \frac{3}{4}u \text{ et l'image est une demi-droite puisque } u \leq 0 \text{ et } v \leq 0$$

**Exercice 2**

$$z^5 + 32i = 0 \Rightarrow z^5 = -32i = 32\text{cis}(270^\circ + k \cdot 360^\circ) \text{ d'où}$$

$$z = 2\text{cis}(54^\circ + k \cdot 72^\circ)$$

$$z_0 = 2\text{cis}(54^\circ), z_1 = 2\text{cis}(126^\circ), z_2 = 2\text{cis}(198^\circ), z_3 = 2\text{cis}(270^\circ),$$

$$z_4 = 2\text{cis}(342^\circ)$$

Exercice 3

$$P(z) = 8z^3 - 12z^2 + 2z - 3, P(bi) = (12b^2 - 3) + (-8b^3 + 2b)i \text{ d'où } b^2 = \frac{1}{4},$$

donc $z_1 = \frac{1}{2}i$ et $z_2 = -\frac{1}{2}i$, pour trouver le dernier zéro on factorise

$$P(z) = \left(z - \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2}i\right) \cdot (8z - 12) = \left(z^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot (8z - 12) \Rightarrow z_3 = \frac{3}{2}$$

Remarque : $P(z) = (2z - i) \cdot (2z + i) \cdot (2z - 3)$