

LDPR: Niveau 2 : Probabilités

EXERCICE 2.13

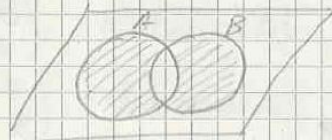
1) $A \cap \bar{B}$



2) $\overline{A \cup B}$



3) $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$



EXERCICE 2.14

1) $S = \{1p, 1g, 2p, 2g, 3p, 3g, 4p, 4g, 5p, 5g, 6p, 6g\}$

2) a) $A = \{2g, 4g, 6g\}$

b) $B = \{2p, 2g, 3p, 3g, 5p, 5g\}$

c) $C = \{1p, 3p, 5p\}$

3) a) $A \cup B = \{2g, 4g, 6g, 2p, 3p, 5p, 3g, 5g\}$

b) $B \cap C = \{3p, 5p\}$

c) $B \cap \bar{A} \cap \bar{C} = \{2p, 3g, 5g\}$

4) $A \cap C = \emptyset$

EXERCICE 2.15

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad P(\bar{A}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

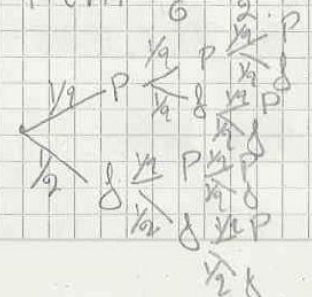
2) $P(\bar{A} \cap B) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

3) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

4) $P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(B \cap \bar{A}) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

EXERCICE 2.16

1) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) 

$$P(F \geq 1) = 1 - P(F = 0) = 1 - P(PPP) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

3) 4B 3R 5B

$$\left. \begin{array}{l} \text{tous les cas: } \binom{12}{1} = 12 \\ \text{cas favorable: } \binom{3}{1} = 3 \end{array} \right\} P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 2.17

tous les cas: $\binom{10}{2} = 45$

1) cas favorable: $\binom{3}{2} = 3$ $P(A) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$

2) cas favorable: $\binom{7}{2} = 21$ $P(B) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

3) cas favorable: $\binom{3}{1} \binom{7}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{0} = 24$ $P(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$
1 fille

4) cas favorable: $\binom{3}{1} \binom{7}{1} = 21$ $P(D) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

EXERCICE 2.18

B \ R	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tous les cas: $|S| = 36$

1) Cas favorable (5,3) (1)
 $P(A) = \frac{1}{36}$

2) (3,5) et (5,3)
 $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

3) (1,1) (2,2) (6,6)
 $P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

4) (6,2) (2,6) (3,5) (5,3) (4,4)
 $P(D) = \frac{5}{36}$

5) $P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

6) $P(F) = \frac{25}{36}$

7) $P(\bar{F}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

EXERCICE 2.19

Si les filles (468) représentent 65% de tous les étudiants, cela signifie qu'il y a $468 : 0.65 = 720$ étudiants au total.

On a donc 720 étudiants dont 468 filles et $720 - 468 = 252$ garçons

Il y a 240 étudiants dans la chorale. Si x est le nb de garçons dans la chorale, on a alors $5x$ filles dans la chorale. On doit donc avoir $x + 5x = 240$
 $\Rightarrow 6x = 240 \Rightarrow x = 40$. Ainsi il y a 40 garçons et $200 = 5 \cdot 40$ filles dans la chorale

a. $P(A) = \frac{200}{720} = \frac{5}{18}$

b. $P(B) = \frac{468-200}{720} = \frac{268}{720} = \frac{67}{180}$

c. $P(C) = \frac{252-40}{720} = \frac{212}{720} = \frac{53}{180}$

d. $P(D) = \frac{40}{720} = \frac{1}{18}$

EXERCICE 2.20

On a 4 possibilités: FF, FP, PF, PP

Pour chacun d'eux, la probabilité est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

On gagne 2.- si FF, 1.- si FP et PF et on perd 3.- si PP. On obtient $\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-3) = -\frac{1}{4} < 0$

Ainsi on risque de perdre de l'argent
 le jeu n'est pas donc pas équitabile et on ne joue pas

EXERCICE 2.21

a) la probabilité d'obtenir 1 as est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
 (4 as par 52 cartes) la probabilité d'obtenir 1 autre carte est $\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$. Avec 1 as, on gagne 10 \$. En tirant autre chose, on perd 1 \$. L'espérance de gain est ainsi

$$\frac{1}{13} \cdot 10 - \frac{12}{13} \cdot 1 = \frac{10}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{2}{13} < 0$$

Ainsi, on risque de perdre de l'argent.

Il vaut donc mieux ne pas jouer

b) $E = \frac{25}{100} \cdot 15 + \frac{50}{100} \cdot 5 - \frac{25}{100} \cdot 5 = 5$

EXERCICE 2.22

Il s'agit de probabilité conditionnelle: la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisée est donnée par $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

a. Ici $A = 3$ faces, $B =$ face sur 1. -, $A \cap B = 3$ faces

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ et } P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } p = P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

b. Ici $A = 3$ faces, $B =$ pile sur 2. -, $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0$ et $P(B) = \frac{1}{2}$. Ainsi $p = P(A|B) = 0$

c. Ici $A = 3$ faces, $B =$ au moins une fois face, $A \cap B = 3$ faces, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(B) = P(\text{au moins une fois face}) = 1 - P(\text{aucun face}) = 1 - P(3 \text{ fois pile}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$$\text{Ainsi } p = P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$$

EXERCICE 2.23

Notons E l'ensemble des élèves ayant échoué en math et F l'ensemble de ceux ayant échoué en chimie. $E \cap F$ est l'ensemble des élèves ayant échoué en math et en chimie.

On a $P(E) = 25\% = \frac{1}{4}$, $P(F) = 15\% = \frac{3}{20}$ et $P(E \cap F) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

a. C'est la probabilité conditionnelle.

La formule est $p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Ici $A = E$ et $B = F$. Ainsi $A \cap B = E \cap F$

$$\text{Ainsi } p(A|B) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{2}{3}$$

b. C'est aussi une probabilité conditionnelle

Ici $A = F$ et $B = E$. Ainsi $A \cap B = F \cap E = E \cap F$

$$\text{Ainsi } p(A|B) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c. On a } p(E \cup F) &= p(E) + p(F) - p(E \cap F) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{20} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\text{d. On a } p(\overline{E \cap F}) = p(\overline{E \cup F}) = 1 - p(E \cup F) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

EXERCICE 2.24

Deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

a. S'il y a 3 enfants, l'univers des possibilités

$$\Omega = \{(G; G; G); (G; G; F); (G; F; G); (F; G; G); (G; F; F); (F; G; F); (F; F; G); (F; F; F)\}$$

On a: $A = \{(G; G; G); (F; F; F)\}$

$$B = \{(G; G; G); (G; G; F); (G; F; G); (F; G; G); (G; F; F); (F; G; F); (F; F; G)\}$$

$$A \cap B = \{(G; G; G)\}$$

$$p(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad p(B) = \frac{7}{8}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Comme $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32} \neq \frac{1}{8} = p(A \cap B)$, on en conclut que A et B ne sont pas indépendants

b. S'il y a 2 enfants, l'univers des possibilités est

$$\Omega = \{(G; G); (G; F); (F; G); (F; F)\}$$

On a: $A = \{(G; G); (F; F)\}$

$$B = \{(G; G); (G; F); (F; G)\}$$

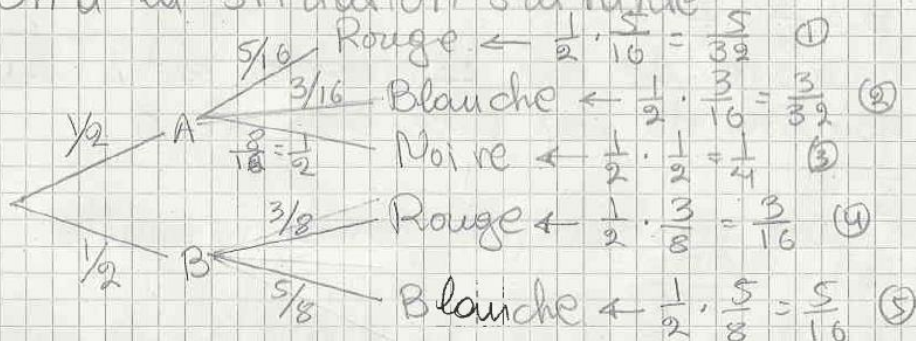
$$A \cap B = \{(G; G)\}$$

$$p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad p(B) = \frac{3}{4}; \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Comme $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4} = p(A \cap B)$, on en conclut que A et B ne sont pas indépendants

EXERCICE 2.25

On a la situation suivante



a. a) $\textcircled{1} + \textcircled{4} = \frac{5}{32} + \frac{3}{16} = \frac{11}{32}$

b) $\textcircled{2} + \textcircled{5} = \frac{3}{32} + \frac{5}{16} = \frac{13}{32}$

c) $\textcircled{3} = \frac{1}{4}$

b. Ce sont des probabilités conditionnelles:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \begin{array}{l} E \text{ correspond à choisir la} \\ \text{boîte A} \end{array}$$

a. F correspond à la boule rouge.

ENF correspond à chemin $\textcircled{1}$

On a: $p(ENF) = \frac{5}{32}$ et $p(F) = \frac{11}{32}$ (voir a.a)

Ainsi $P(E|F) = \frac{5/32}{11/32} = \frac{5}{11}$

b. F correspond à la boule est blanche.

ENF correspond au chemin $\textcircled{2}$

On a: $p(ENF) = \frac{3}{32}$ et $p(F) = \frac{13}{32}$ (voir a.b)

Ainsi $p(F|F) = \frac{3/32}{13/32} = \frac{3}{13}$

c. F correspond à la boule est noire.

ENF correspond au chemin $\textcircled{3}$

On a: $p(ENF) = \frac{1}{4}$ et $p(F) = \frac{1}{4}$ (voir a.c)

Ainsi $p(E|F) = \frac{1/4}{1/4} = 1$.

EXERCICE 2.26

a. le nombre de cas favorables sont 3

(l'as de pique et une des 3 autres cartes)

le nombre de cas possibles est 2 cartes

regues parmi 4 = $\binom{4}{2} = 6$

la $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b. le nombre de cas favorables est 1 (les 2 as)

le nombre de cas possibles est 6.

$p = \frac{1}{6}$

c. C'est une probabilité conditionnelle:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

ici E = A a les 2 as, F = A a l'as de pique

On a ENF = A a les 2 as.

-7-

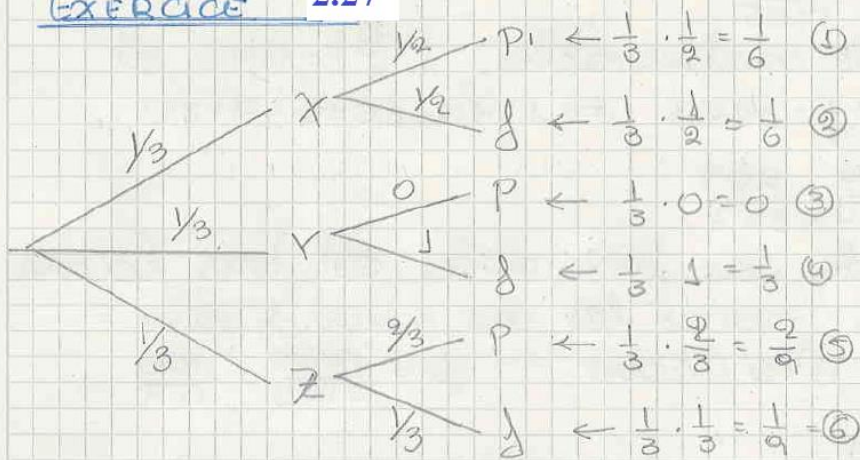
De plus $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$ (noir b) et $P(F) = \frac{1}{2}$ (noir a)
 Ainsi $P(E|F) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

d. C'est aussi une probabilité conditionnelle

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Ici $E = A$ a l'as de pique; $F = A$ a l'as au moins des 2 as. On a $E \cap F = A$ a l'as pique.
 De plus $P(E \cap F) = \frac{1}{2}$ (noir a) et $P(F) = 1 - P(\bar{F}) =$
 $= 1 - P(A \text{ a aucun as}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
 Ainsi $P(E|F) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$

EXERCICE 2.27



a. la probabilité d'obtenir face est

$$(2) + (4) + (6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

b. C'est une probabilité conditionnelle:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ici $A = \text{pièce } X$ et $B = \text{face}$

On a $A \cap B = \text{pièce } X \text{ et face}$

En outre, $P(A \cap B) = (2) = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{11}{18}$ (a)

$$\text{Ainsi } P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{18}} = \frac{3}{11}$$

c. C'est aussi une probabilité conditionnelle:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ici $A = \text{pièce } Z$ et $B = \text{pile}$

On a $P(A \cap B) = (5) = \frac{2}{9}$ et $P(B) = (1) + (3) + (5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$

$$\text{Ainsi } P(A|B) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}$$

EXERCICE 2.28

- le nb de cas possibles $\binom{36}{3} = 7140$
- a. le nb de cas favorables est $\binom{4}{3} = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{7140} = \frac{1}{1785}$
- b. le nb de cas favorable: $\binom{4}{2} \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$
 $p = \frac{24}{7140} = \frac{2}{595}$
- c. le nb de cas favorables: $\binom{16}{3} = 560$
 $p = \frac{560}{7140} = \frac{4}{51}$
- d. le nb de cas favorables est $\binom{16}{1} \binom{12}{1} \binom{8}{1} = 256$
 $p = \frac{256}{7140} = \frac{64}{1785}$
- e. le nb de cas favorables: $\binom{20}{3} = 1140$ et
 $\binom{16}{1} \binom{20}{2} = 3040 \Rightarrow 1140 + 3040 = 4180$
 $p = \frac{4180}{7140} = \frac{209}{357}$
- f. le nb de cas favorables est tous les cas possibles moins les cas sous figure =
 $= 7140 - 1140 = 6000 \Rightarrow p = \frac{6000}{7140} = \frac{100}{119}$

EXERCICE 2.29

- a. les 2 tickets ont exactement la même probabilité
- b. l'étoile 5 aura 1 chance sur 9 d'être la 1^{re} sortie et 1 chance sur 8 d'être la 2^{de} étoile sortie
 Ainsi $p = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$
- c. $p = \frac{17}{12}$ car
- d. il y a $\binom{50}{5} = 2118760$ possibilités.
- e. $\binom{9}{2} = 36$
- f. $\binom{9}{2} \cdot \binom{50}{5} = 76275360$. Comme il y a qu'une combinaison gagnante, $p = \frac{1}{76275360}$
- g. Pour 2 étoiles on a $\binom{9}{2} = 36$ possibilités
 Pour avoir une étoile juste $\binom{2}{1} \binom{7}{1} = 14$
 $p = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

h. la probabilité: $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$

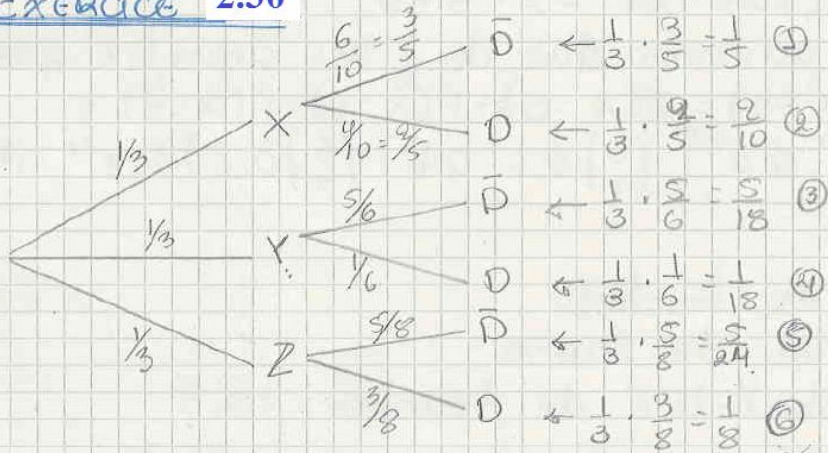
• $0 = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

• $P(X=0) = \binom{45}{5}$ • $P(X=1) = \binom{5}{1} \binom{45}{4}$

• $P(X=2) = \binom{5}{2} \binom{45}{3}$

Donc $P(X \geq 3) = 1 - \binom{45}{5} - \binom{5}{1} \binom{45}{4} - \binom{5}{2} \binom{45}{3} = 0.004782$

EXERCICE 2.30



a. la probabilité correspond aux chemins ①, ②, ③

$P(\bar{D}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6} = \frac{247}{360}$

b. C'est la probabilité conditionnelle $P(Z|\bar{D})$

On a $Z \cap \bar{D} = \text{chemin ⑤} = \frac{5}{24}$, $P(\bar{D}) = \frac{247}{360}$

Ainsi $P(Z|\bar{D}) = \frac{5/24}{247/360} = \frac{75}{247}$

EXERCICE 2.31

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où

X est l'atteinte de la cible

k = le nb d'attente, n = le nb de tire

p = la probabilité d'atteindre la cible.

Ici $p = \frac{1}{4}$, Donc $1-p = \frac{3}{4}$ En outre $n = 6$

a. $P(X=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-2} \approx 26.66\%$

b. $P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-6} \approx 0.46\%$

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-0} \approx 82.2\%$

Exercice 2.32

X : le nb de garçons

n : le nb d'enfants = 6

p : la probabilité d'avoir 1 garçon = 0.6 $\Rightarrow 1-p=0.4$

a. $P(X=3) = \binom{6}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^3 \approx 27.648\%$

b. Moins de garçons que de filles signifie que

$$X \leq 2, P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \\ = \binom{6}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^6 + \binom{6}{1} 0.6^1 \cdot 0.4^5 + \binom{6}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^4 = 17.92\%$$

Exercice 2.33

X : le nb de touches

n : le nb de de lances

p : la probabilité de toucher = 0.3

$$P(X \geq 1) > 90\% = 0.9 \Rightarrow 1 - P(X=0) > 0.9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) < 0.1 \Leftrightarrow \binom{n}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^n < 0.1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.7^n < 0.1 \Leftrightarrow n \log 0.7 < \log 0.1 \Leftrightarrow n > \frac{\log 0.1}{\log 0.7} \Rightarrow$$

$$n > 6.45 \Rightarrow n = 7$$

Exercice 2.34

a. X : le nb les 6 que l'on veut obtenir
 n : le nb de lances p : la probabilité de ce qu'on veut

$$n=5, p=\frac{1}{6}$$

a) $P(X=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 0.0129\%$

b) $P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 40.19\%$

c) $P(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} \approx 3.215\%$

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 59.81\%$

b. $P(X \geq 1) > 0.995 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0.995 \Leftrightarrow P(X=0) < 0.005$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.005 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.005 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{5}{6} < \log 0.005 \Leftrightarrow n > \frac{\log 0.005}{\log \frac{5}{6}} \approx 29.06$$

$$\Rightarrow n \geq 30$$