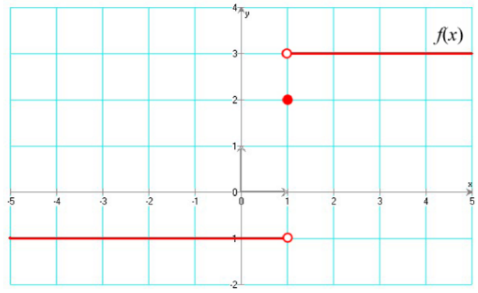
LDDR – Niveau 1 : Limites – Continuité

Exercice 1. *: Soit la fonction* $f(x) = \begin{cases} -1 & si & x < 1 \\ 2 & si & x = 1 \\ 3 & si & x > 1 \end{cases}$

Déterminez si possible :



a) $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$

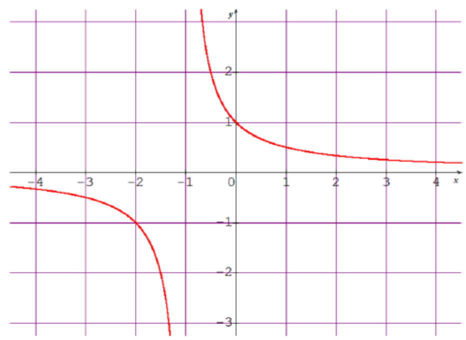
b) $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$

c) $f(1)$

d) $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$

Exercice 2. *: Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Déterminez si possible :



a) $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} -1} f(x)$ *e)* $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$

b) $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$ *f)* $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$

c) $f(-1)$ *g)* $f(1)$

d) $\lim_{x \longrightarrow -1} f(x)$ *h)* $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$

Vérifiez les points a), b), e) et f) en établissant un tableau de valeurs.

Exercice 3. *: Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Déterminez si possible :

a) $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 0} f(x)$

b) $\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)$

c) $f(0)$

d) $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$

Vérifiez les points a) et b) en établissant un tableau de valeurs.

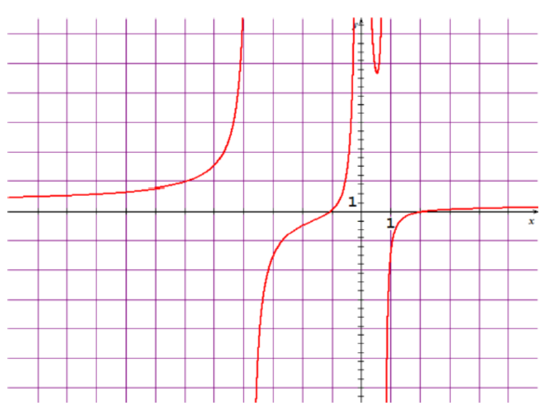
Exercice 4. *En utilisant le graphe de* $f(x)$*, déterminez si possible les limites ci-dessous :*

a) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \longrightarrow -6} f(x)$

d) $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$



e) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

f) Déterminez les équations des asymptotes verticales et horizontales.

Exercice 5. *Dessinez une fonction g telle que :*

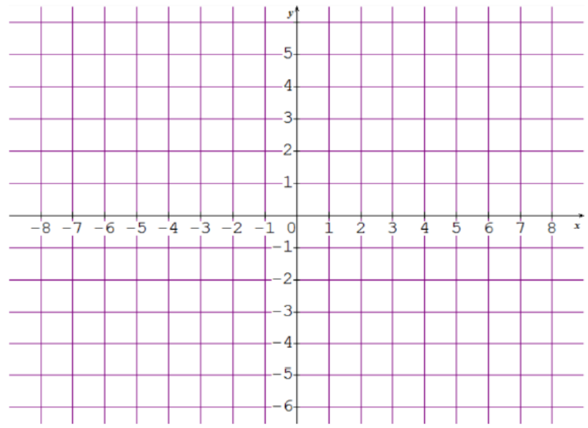
$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} g(x) = -2\,,$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 3 \\ <}} g(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 3 \\ >}} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} g(x) = \infty$$

$$g \cap Ox = \{(5;0)\}$$



Exercice 6. *Calculez, si elles existent, les limites suivantes et lorsqu'il s'agit d'un cas particulier, indiquez le comportement de la fonction au voisinage de cette limite (asymptote verticale, trou, saut).*

a) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{1}{y-1}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-2x}{x+1}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{x^2+x-6}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \log(x)$

* **Exercice 7.** *Même exercice :*

a) $\lim_{x\to 5} \dfrac{5x}{5+x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *c)* $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2}$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2}$ *e)* $\lim_{x\to -2} \dfrac{x-2}{x+2}$ *f)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{4x+1}$

g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(2x)$ *h)* $\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)^2}{x-3}$ *i)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{4-2x}$

j) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(3x-1)^2}{(2x+1)^3}$ *k)* $\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2}$ *l)* $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4}{x^3+8}$

m) $\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} \log(2x)$ *n)* $\lim_{x\to 0} 5^x$ *o)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x-1}$

p) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ *q)* $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ *r)* $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{-3x^2+6x+45}$

Exercice 8. *Même exercice :*

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{|x|}$ *c)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|+x^2}{x}$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-7x+12}$ *e)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4}$ *f)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

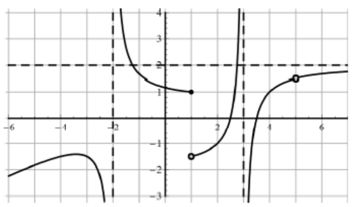
Exercice 9. *Même exercice :*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x\cdot\tan(x)} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x^2-3x} \qquad f)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

Exercice 10. *En amplifiant la fractions par $cos(x)+1$, montrez que* $\lim_{x\to 0}\dfrac{cos(x)-1}{x}=0$.

Exercice 11. *Déterminez le domaine de définition et discutez la continuité de la fonction représentée ci-dessous, puis déterminez les limites suivantes :*



$$\lim_{x\longrightarrow 5} f(x) \qquad \lim_{x\underset{>}{\longrightarrow}-2} f(x) \qquad \lim_{x\longrightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x\underset{<}{\longrightarrow}1} f(x) \qquad \lim_{x\underset{>}{\longrightarrow}1} f(x) \qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$$

Exercice 12. *Soient les fonctions* $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 0 \\ x & si \quad x>0\end{cases}$ *et* $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & si \quad x\neq 0 \\ 0,5 & si \quad x=0\end{cases}$.

Dessinez le graphe de ces fonctions et déterminez si elles sont continues à l'origine.

Exercice 13. *Soit* $f(x)=\begin{cases} 2x & si & x\leq 3 \\ ax+b & si & 3<x\leq 5 \\ -x & si & x>5\end{cases}$.

Sachant que f est continue sur $\mathbb{R}$, dessinez son graphe puis trouvez les valeurs de a et b.

Exercice 14. *Un parking fait payer 2 francs pour la première heure (ou fraction d'heure) et 1 franc pour chaque heure suivante jusqu'à un maximum journalier de 10 francs.*

1. *Représentez graphiquement ce tarif de parking en fonction du temps.*
2. *Remarquez les discontinuités de cette fonction et expliquez leur signification à quelqu'un qui met sa voiture dans ce garage.*

Exercice 15. *Déterminez si les fonctions ci-dessous sont discontinues pour la valeur de a donnée.*

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ $\qquad a=-1$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & si \quad x\neq -1 \\ 6 & si \quad x=-1\end{cases}$ $\qquad a=-1$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & si \quad x\neq 4 \\ 6 & si \quad x=4\end{cases}$ $\qquad a=4$

d) $f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x\leq 2 \\ x^2-2x & si \quad x>2\end{cases}$ $\qquad a=2$

Exercice 16. *Calculez les limites suivantes :*

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+2}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$ e) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$ f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2}$ h) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2+2}{4x+4}$ i) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3}$

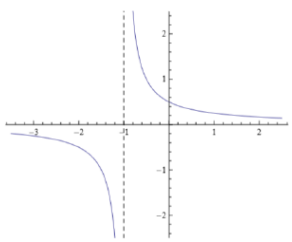
Exercice 17. *Déterminez le domaine de définition, les asymptotes verticales et le comportement asymptotique autour de celles-ci, ainsi que les trous des fonctions suivantes données par leurs expressions fonctionnelles.*

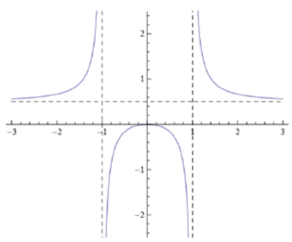
$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2} \qquad g(x) = \frac{4-x^2}{x^2-x-2} \qquad h(x) = \frac{3x^4+12x^3+9x^2}{4x^3+8x^2-12x}$$

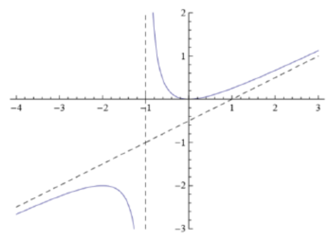
Exercice 18. *Les graphes ci-dessous possèdent des asymptotes* **verticales**, **horizontales**, *ou* **obliques**. *Donnez l'équation de chaque asymptote, puis trouvez l'expression de chaque fonction :*

$$y = \frac{x^2}{2(x+1)},\ y = \frac{x^2}{2(x^2-1)} \ \text{ et } \ y = \frac{1}{2(x+1)} \quad \textit{qui est qui ?}$$

$f_1(x) =$ $f_2(x) =$ $f_3(x) =$







Exercice 19. *Calculez les limites suivantes ; en déduire la présence d'éventuelles asymptotes horizontales pour les fonctions en question :*

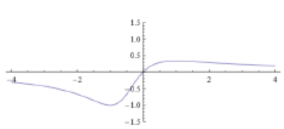
a) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^3-7x)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{5x+6}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$

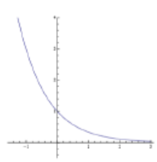
e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-5x+6}{2x^2-7x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^4-3x^3+x}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\log(x)}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2-1)^3}{(x^3-5x)^2}$

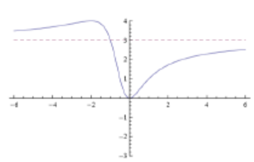
Exercice 20. *Les fonctions suivantes ont-elles des asymptotes horizontales ?*

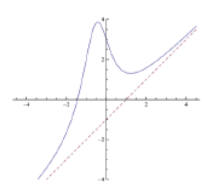
a) $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2+x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+x+1}$ c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$ d) $l(x) = 3^{-x}$

Qui est qui ?









Exercice 21. *Déterminez les asymptotes affines et étudiez le comportement asymptotique (pour ces asymptotes) des fonctions suivantes :*

a) $x \mapsto f(x) = \dfrac{5 - x - 4x^2}{2x + 1}$ *b)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 2x + 3}$

c) $x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x + 1}{2 + 10x}$ **d)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{5x^2 + 10x - 1}$

Exercice 22. *Déterminez toutes les asymptotes et étudiez le comportement asymptotique des fonctions suivantes :*

a) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1}$ *b)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{4x^2 + 5}{x - 2}$ *c)* $x \mapsto f(x) = \dfrac{8x^4 - 3x^2 + 1}{4x^3 + 10}$

***Exercice 23.** *Même exercice :*

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x}$ *h)* $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3}$ *i)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$

j) $f(x) = \tan(x)$ *k)* $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{(x + 1)^2}$ *l)* $f(x) = 5x - 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Exercice 24. *Trouvez une fonction rationnelle f qui possède une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 4$ et une asymptote verticale d'équation $x = -2$.*

Exercice 25. *La fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ passe par le point $(2; 2)$ et possède les asymptotes $x = -3$ et $y = -2x + 1$.*

Retrouvez les coefficients a, b, c et d.

Exercice 26. *Étudiez les fonctions suivantes en déterminant :*

- ⋆ *le domaine de définition, les intersections avec les axes, et le tableau des signes ;*
- ⋆ *l'étude des exclus (éventuels trous, sauts ou asymptotes verticales et comportement asymptotique) ;*
- ⋆ *les éventuelles asymptotes affines et comportement à l'infini ;*
- ⋆ *le graphe de la fonction.*

$x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$ $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{3}{x}$ $x \mapsto h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{(x + 1)^2}$

Exercice 27. *De l'eau salée contenant 5 grammes de sel par litre s'écoule à raison de 10 litres par heure dans une grande cuve contenant initialement 10 litres d'eau pure.*

a) *Calculez le volume total d'eau et la quantité de sel de la cuve au bout de t heures.*

b) *Quelle est la concentration en sel après une longue période de temps ?*