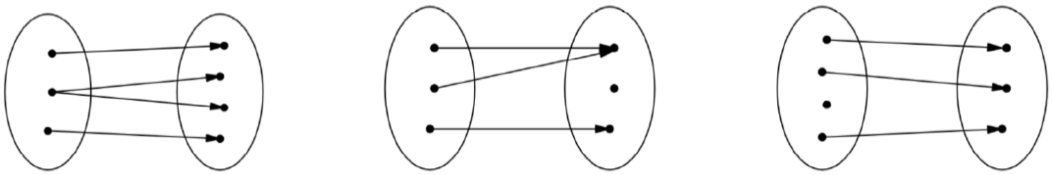
LDDR – Niveau 1 : Fonctions

Exercice 1. *a) Sachant que les ensembles représentés sont les ensembles de départ et d'arrivée, s'agit-il de fonctions ?*



b) Dans le troisième cas, en rouge, déterminer l'ensemble de départ de manière à ce que la correspondance soit une fonction.

Exercice 2. ***Partie 1 :*** *Soit la fonction réelle f définie par*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+5 \end{array}$$

a) Quels sont les ensembles de définition, d'arrivée et l'ensemble des images de f ?

b) Quelle est l'image de 4 et de -2 par f ?

c) Quelle est la préimage de 14 par f ? Et -2 est-il un antécédent de 4 ?

d) Déterminez... 1) $f(3)$ 2) $f(x+3)$ 3) $f(x)+f(3)$ 4) $f(3x)$ 5) $3f(x)$ 6) $f\left(\frac{3}{x}\right)$ 7) $-f(x)$ 8) $f(-x)$

Partie 2 : *Reprendre a) et d) avec les fonctions $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $f(x)=\sqrt{3x}$ et $f(x)=x^3-8x-3$.*

Exercice 3. *On donne la fonction $f: x \longmapsto y=\dfrac{x+3}{x^2+2}$.*

a) S'agit-il d'une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? De $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$?

b) Déterminez les images par f des nombres 0 et -1.

c) Déterminez $f(x+1)$, $f(x-2)$ et $f(3x)$.

d) Calculez la préimage par f de 1.

Exercice 4. *On donne la fonction* $\varphi: \begin{array}{ccl} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & y=\varphi(n)=\text{nombre de diviseurs de } n. \end{array}$

a) Calculez les images par φ des nombres 1, 2, 4 et 24.

b) Quelles sont les préimages de 0, de 1 et de 2 ?

c) Quand a-t-on $\varphi(n)$ impair ?

Exercice 5. *Les fonctions suivantes sont données par leurs expressions fonctionnelles.*

$$f(x) = -2x + 1 \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x + 5 \qquad h(x) = \sqrt{x-1}$$

$$i(x) = \frac{1}{x+2} \qquad j(x) = -2 \qquad k(x) = \frac{1}{x^2-9}$$

$$l(x) = \frac{4x^2-9}{(x-1)(x+2)} \qquad m(x) = \frac{x-2017}{25-16x^2} \qquad n(x) = \sqrt{1-2x}$$

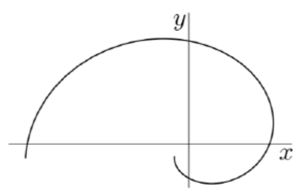
a) Déterminez le domaine de définition de chaque fonction.

b) Calculez l'image de $\frac{3}{2}$ par les fonctions j et l.

c) Calculez l'image de $x-1$ par les fonctions f, g, h, i et j.

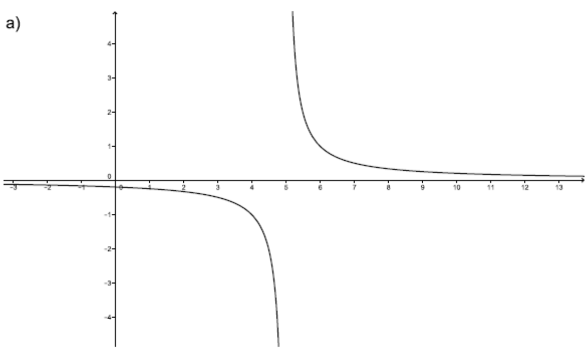
d) Déterminez la préimage de 5 par les fonctions g et h, ainsi que la préimage de 0 par la fonction m.

Exercice 6. *Cette courbe n'est* **pas** *le graphe d'une fonction. Expliquez pourquoi.*

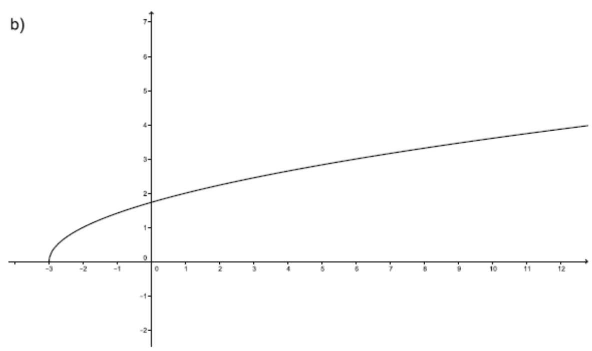


Exercice 7. *Déterminez le domaine de définition D_f des fonctions f ci-dessous représentées par leur graphe.*

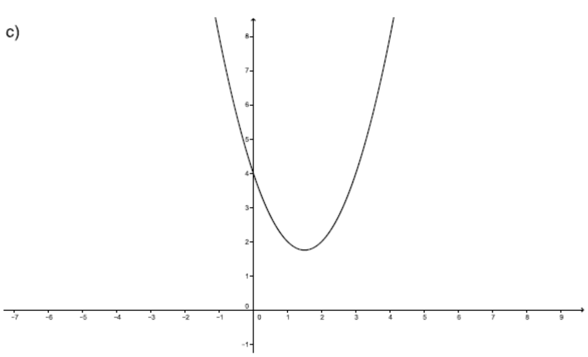
a)



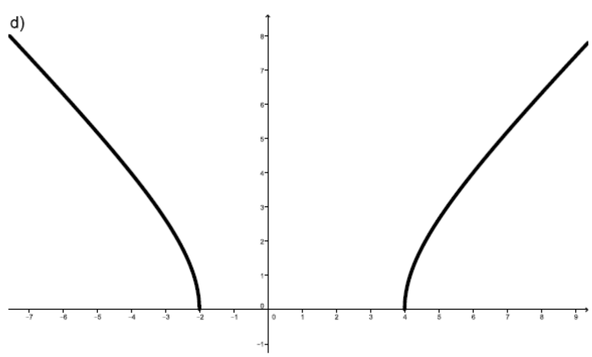
b)



c)



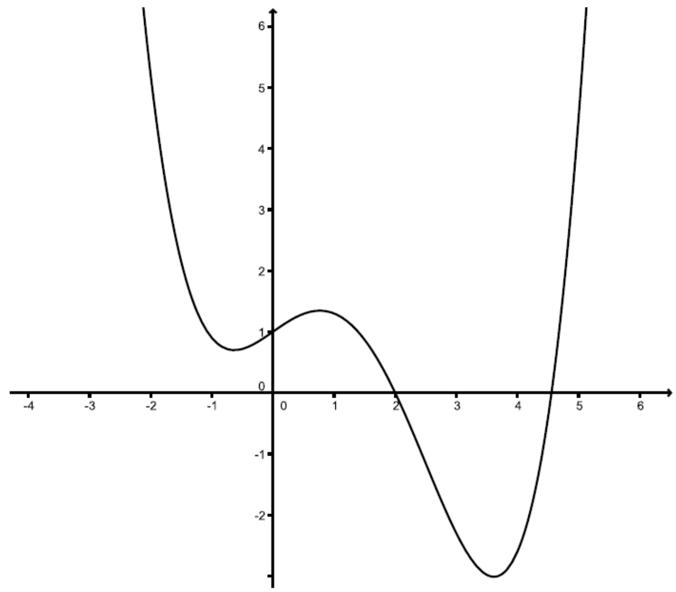
d)



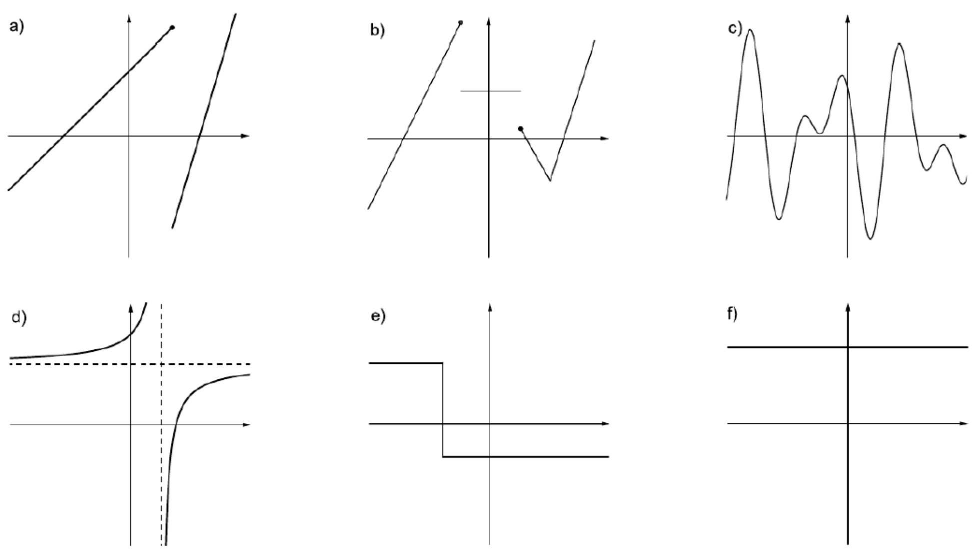
Exercice 8. *La figure ci-dessous représente le graphe d'une fonction f.*

En observant le graphe, estimez

1. *La valeur de $f(0)$;*
2. *La valeur de $f(-2)$;*
3. *Les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;*
4. *Les valeurs de x sachant que $f(x) = 1$;*
5. *La valeur de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution ? Quelle est cette solution ?*
6. *Les valeurs de x sachant que $f(x) = x$.*

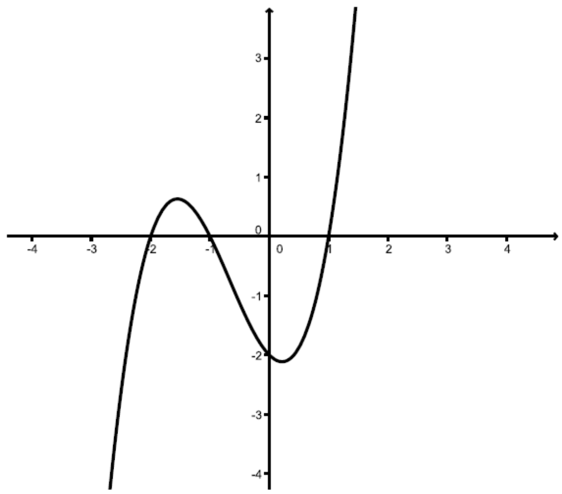


Exercice 9. *Parmi les graphes suivants, quels sont ceux désignant des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifiez.*

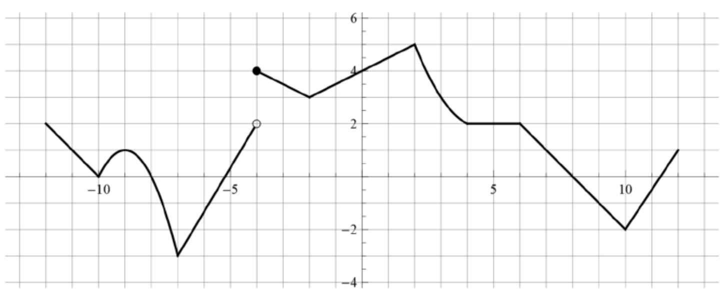


Exercice 10. *La figure ci-dessous représente le graphe d'une fonction f.*

Donnez l'ensemble des zéros de f.



Exercice 11. *Une fonction $f : [-12; 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet le graphe suivant.*



Remarque : nous disons que cette fonction présente un **saut** *en $x = -4$.*

a) *Déterminez les images $f(-11)$, $f(-7)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(9)$.*

b) *Trouvez l'ensemble des images et les zéros de f.*

c) *Déterminez les préimages de 5, de 2, de 1 et de -4.*

d) *Identifiez les ensembles $A = f(]5; 7[)$ et $B = \{x \text{ tels que } f(x) > 2\}$.*

e) *Trouvez le(s) point(s) du graphe dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.*

f) *Complétez le tableau des signes de la fonction f.*

x	-12		-10		-8									
$f(x)$	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$								

Exercice 12.

a) *Déterminez le domaine de définition, les intersections avec les axes, faire un tableau des signes puis esquisser le graphe des fonctions suivantes.*

$$f_1 : y = 3 \qquad f_2 : y = \tfrac{1}{2}x + 1 \qquad f_3 : y = x^2 + x - 2 \qquad f_4 : y = \tfrac{x+2}{x-1}$$

b) *Quel est l'ensemble des images de chacune de ces trois fonctions ? Indice : le sommet de la parabole d'équation* $y = x^2 + x - 2$ *se trouve en* $x = -\frac{1}{2}$.

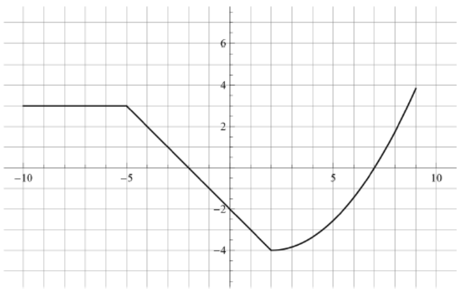
c) *Calculez les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection des fonctions* f_1 *et* f_2 , f_2 *et* f_3 *et* f_2 *et* f_4*, et vérifiez les résultats sur le graphique.*

***Exercice 13.** *Trouvez les zéros des fonctions suivantes :*

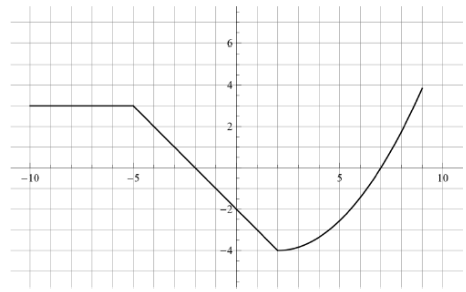
$$f_1(x) = \frac{x^4 - 11x^2 + 18}{x^7 - x + 2016} \qquad\qquad f_2(x) = \sqrt{4x+1} - x + 1$$

Exercice 14. *Pour la fonction f dont le graphique est représenté, dessiner les fonctions suivantes :*

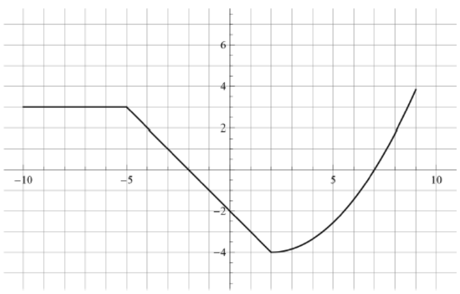
a) $g: \ g(x) = f(x) + 2$



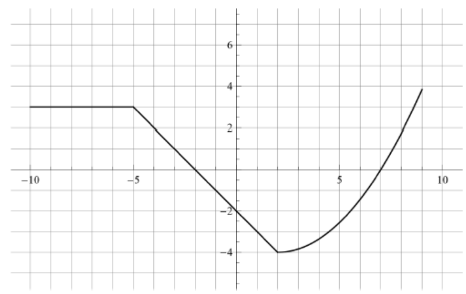
b) $h: \ h(x) = f(x+2)$



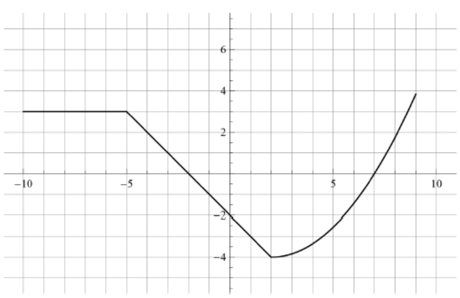
c) $i: \ i(x) = |f(x)|$



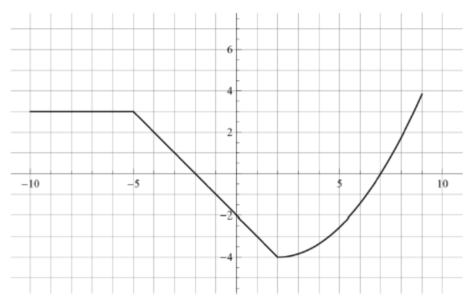
d) $j: \ j(x) = sgn(f(x))$



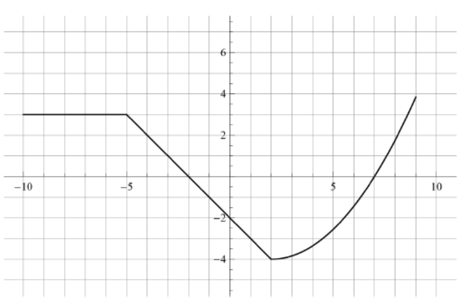
e) $k: \ k(x) = [f(x)]$



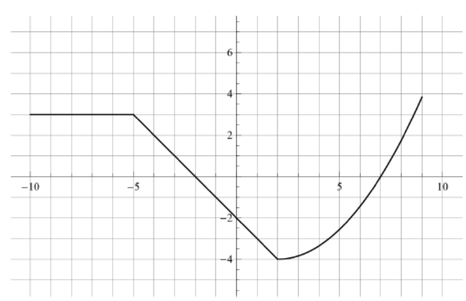
f) $l: \ l(x) = -f(x)$



g) $m: \ m(x) = f(-x)$



h) $n: \ n(x) = -f(-x)$



Exercice 15. *Du graphe de $f(x) = |x|$ déduisez ceux de*

$$a(x) = 2|x| \qquad b(x) = x + |x| \qquad c(x) = -|x| + 2$$
$$d(x) = |x-3| \qquad {}^*e(x) = |2x+5| \qquad {}^*f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Exercice 16. *On donne les fonctions réelles suivantes par leurs expressions fonctionnelles.*

$$f_1(x) = 2x - 3 \qquad f_2(x) = -x \qquad f_3(x) = x^2$$
$$f_4(x) = \tfrac{2x+4}{3} \qquad f_5(x) = \tfrac{2}{x} + \tfrac{4}{3} \qquad f_6(x) = x^2 - (x+2)(x-4)$$

a) Parmi ces fonctions, lesquelles sont affines ?

b) Représentez graphiquement les fonctions affines dans un même système d'axes.

****Exercice 17.** *Si x est une vitesse exprimée en km/h et y la même vitesse exprimée en m/s, quelle est l'expression de la fonction linéaire $f : x \longmapsto y$?*

Exercice 18. *Déterminez par dessin et par calcul le point d'intersection des graphes des fonctions*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y = \tfrac{2x+2}{3} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y = \tfrac{5}{4}x - \tfrac{5}{2}.$$

Exercice 19. *Trouvez l'expression de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :*

a) Le graphe de f est une droite de pente $m = 2$ qui passe par $A(2;3)$.

b) La fonction est linéaire et son graphe passe par le point $P(-2;5)$.

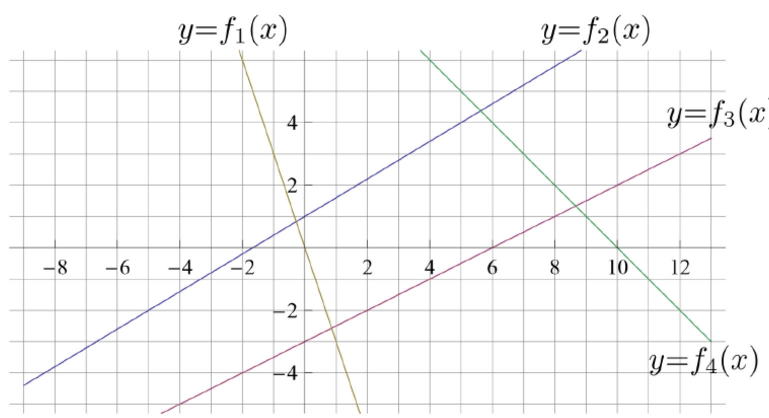
c) Le graphe de f passe par les points $A(-4;1)$ et $B(2;-2)$.

d) La fonction f vérifie $f(3) = -2$ et $f(-5) = -2$.

e) Le graphe de f passe par $A(\frac{1}{2};3)$ et est parallèle à la droite $d : y = -2x + 4$.

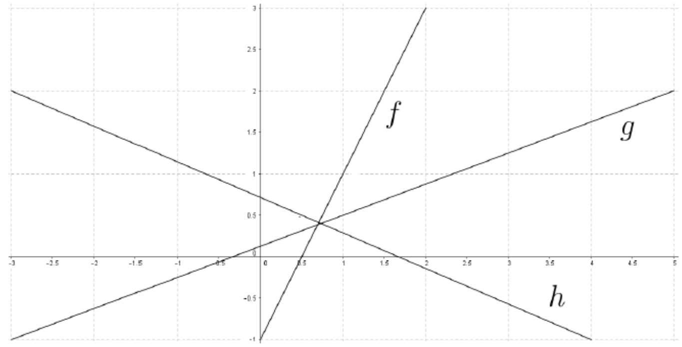
Exercice 20.

Trouvez l'expression de chaque fonction et calculez les coordonnées des points d'intersection visibles sur le graphique.



***Exercice 21.**

Les trois droites f, g et h se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



***Exercice 22.** *Soit la fonction $f(x) = ax + a$, avec $a \in \mathbb{R}$.*

a) *Pour quelles valeurs de a, le graphe de f passe-t-il par le point $A(3; 8)$?*
b) *Vérifiez que, pour toute valeur de a, le graphe de f passe par le même point B dont on donnera les coordonnées.*

Exercice 23. *Résolvez les équations suivantes :*

a) $\lvert 3x-2\rvert = 5$	*b)* $2\lvert x\rvert + 1 = -x + 5$	*c)* $x^2 + \lvert x\rvert - 12 = 0$
d) $-x^2 + 4x + 3 = \lvert x - 9\rvert$	*e)* $-3\lvert x\rvert + 5 = \lvert 5x - 1\rvert$	*f)* $\lvert x-5\rvert = \lvert 6x+2\rvert$

Vérifiez par dessin les réponses de a), b) et d) en envisageant les équations données sous forme $f(x) = g(x)$.

***Exercice 24.** *Résolvez les équations suivantes :*

a) $\lvert x\rvert = 4$	*b)* $\lvert -2x+7\rvert = 3$	*c)* $\lvert x^2+3x-2\rvert = 2$
d) $\lvert -x+5\rvert = \lvert 2x+3\rvert$	*e)* $\lvert x^2+3x-4\rvert = \lvert 3x+12\rvert$	*f)* $\Big\lvert 3\lvert x\rvert - 2\Big\rvert = 7$

Exercice 25. *Représentez graphiquement les fonctions suivantes, puis déterminez, par dessin et par calcul, les points d'intersection des graphes de f et g.*

a) $f : x \longmapsto y = \lvert 2x-1\rvert$ *et* $g : x \longmapsto y = \lvert x-3\rvert$;
**b)* $f : x \longmapsto y = \lvert x\rvert$ *et* $g : x \longmapsto y = \frac{2}{3}x + 2$;
c) $f : x \longmapsto y = \lvert x\rvert$ *et* $g : x \longmapsto y = \frac{2}{3}x - 2$;
**d)* $f : x \longmapsto y = 1 - \lvert x\rvert$ *et* $g : x \longmapsto y = \left\lvert \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right\rvert$.

Exercice 26. *Pour les quatre fonctions ci-dessous, déterminez les points d'intersection du graphe et des axes, les points anguleux, puis représentez le graphe :*

$$f(x) = |-2x+3| - 7 \qquad g(x) = -\tfrac{1}{2}|x-2| + 3$$
$$^{*}h(x) = 2|x-3| - 8 \qquad ^{*}i(x) = |-x^2+6x-5|$$

Précision : les ***points anguleux*** *sont les points où la fonction change de croissance.*

* **Exercice 27.** *Dessinez le graphe de* $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ *et déduisez ceux des fonctions* $g(x) = |f(x)|$ *et* $h(x) = f(|x|)$.

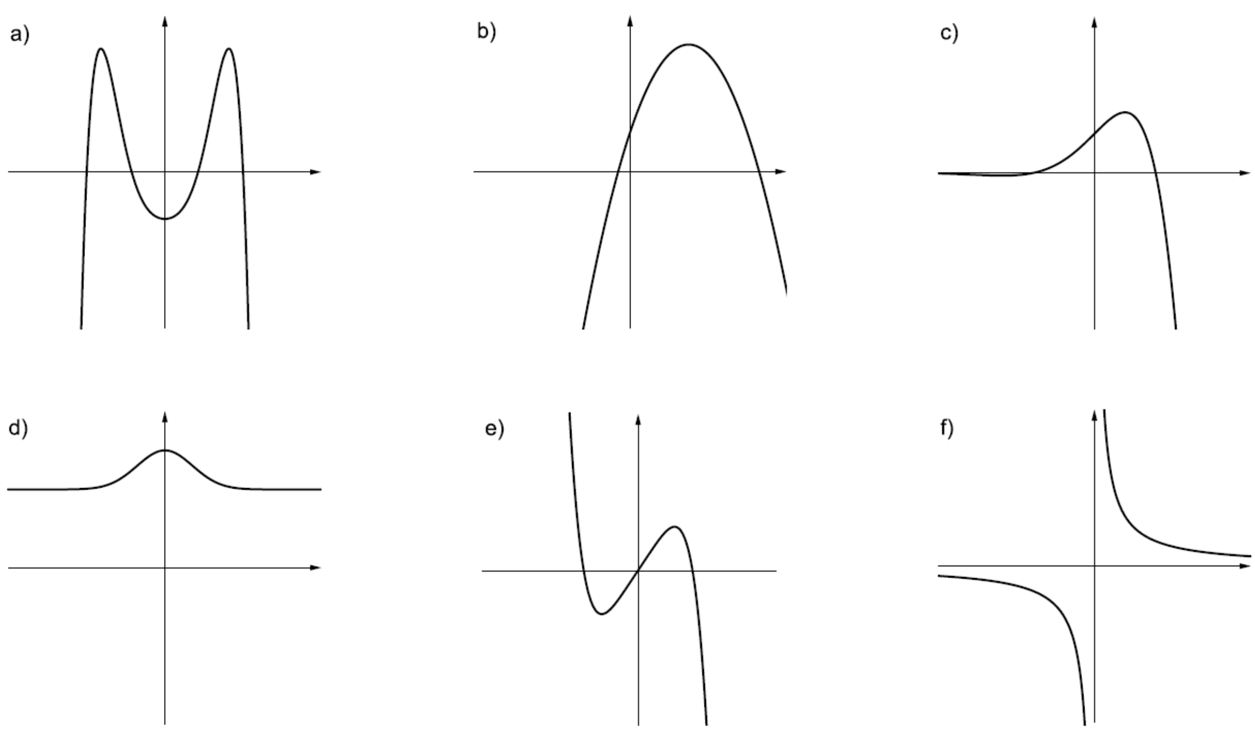
Exercice 28. *Discutez la parité des fonctions suivantes et esquissez leur graphe.*

$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x^3 \quad x \mapsto g(x) = x^2 - 3x \quad x \mapsto h(x) = x^2(4-x^2)$

$x \mapsto i(x) = 3x \quad x \mapsto j(x) = x - 2 \quad x \mapsto k(x) = |x|$

$x \mapsto l(x) = x^2 - 2 \quad x \mapsto m(x) = 1 \quad x \mapsto n(x) = |x| \cdot (x^4 - 2)$

Exercice 29. *Déterminez si les graphes ci-dessous représentent des fonctions paires, impaires ou « ni, ni ».*



Exercice 30. *On donne trois fonctions quadratiques par leurs expressions fonctionnelles.*

$$f(x) = -x^2 - 1 \qquad g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \qquad h(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

Calculez les zéros de chaque fonction et dessinez leur graphe dans un même système d'axes.

Exercice 31. *Dans chaque cas, trouvez k de sorte que la fonction n'ait qu'un seul zéro :*

$$f : y = x^2 + 3x - k \qquad g : y = 2x^2 - kx + 2 \qquad h : y = x^2 - (k+6)x + k + 9$$

Exercice 32. *Calculez les points d'intersection de f avec chacune des fonctions g_1, g_2 et g_3.*

$$f : y = -x^2 + 2x + 8$$

$$g_1 : y = x + 6 \qquad g_2 : y = x + 9 \qquad g_3 : y = -4x + 17$$

Exercice 33. *Trouvez la droite de pente 4 qui est tangente au graphe de la fonction*

$$f : x \longmapsto y = x^2 - 1\,.$$

* **Exercice 34.** *Déterminez la fonction affine dont le graphe est parallèle à celui de d et tangent à celui de f :*

$$d : y = -x \qquad\qquad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

* **Exercice 35.** *Déterminez les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite d dans chacun des cas suivants.*

$$\begin{array}{lll} a) \ \ \mathcal{P} : y = x^2 + 7x - 5 & \text{et} & d : y = 4x + 5; \\ b) \ \ \mathcal{P} : y = 4x^2 - x + 2 & \text{et} & d : y = 3x + 1; \\ c) \ \ \mathcal{P} : y = 7x^2 + 3x + 2 & \text{et} & d : y = x - 2. \end{array}$$

Exercice 36. *Déterminez les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivantes.*

$$\mathcal{P}_1 : y = 4x^2 + 20x - 9;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = -2x^2 + 3x + 5.$$

***Exercice 37.** *Même question pour les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivantes.*

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + 5x - 2;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = 2x^2 + 11x - 9.$$

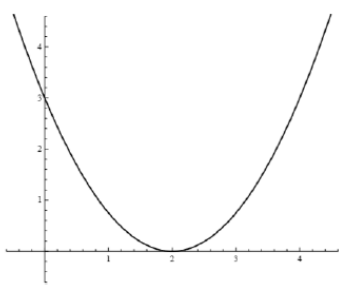
Exercice 38. *Calculez les points d'intersection des paraboles d'équations $y = x^2 + 6x + 9$ et $y = -x^2 - 2x + 1$ puis vérifiez par dessin.*

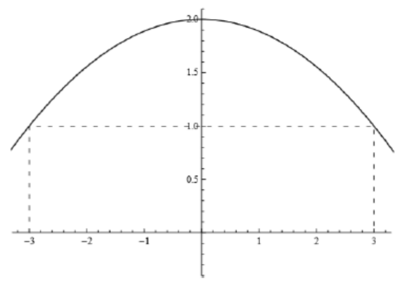
Exercice 39. *Déterminez l'expression fonctionnelle de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $A(1; 9)$, $B(2; 6)$ et $C(5; 3)$.*

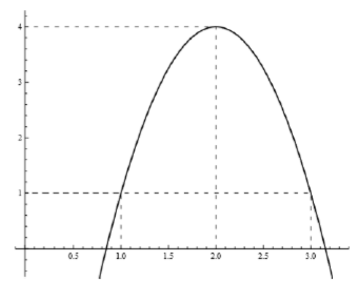
Exercice 40. *Déterminez les coordonnées du sommet et les zéros des fonctions f ci-dessous.*

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$	*c)* $f(x) = 3x^2 + 3$
b) $f(x) = -x^2 + 5x$	*d)* $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$

Exercice 41. *Trouvez l'équation de chaque parabole :*

a)


b)


c)


Exercice 42.

**a)* *Déterminez la fonction $f : x \longmapsto y = f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $A(1; 9)$, $B(-2; -6)$ et $C(-5; -3)$.*

**b)* *Même question avec les points $A(-2; -1)$, $B(1; \frac{1}{2})$ et $C(4; 11)$.*

c) *Une parabole de sommet $S(3; \frac{5}{2})$ passe par le point $A(4; 2)$. Quelle est son équation ?*

Exercice 43.

a) *Écrivez l'équation de la parabole $\mathcal{P} : y = 2x^2 + 2x - 12$ sous sa forme factorisée et sous sa forme sommet.*

b) *Faire de même avec la parabole $\mathcal{P}_2 : y = x^2 - (m + 1)x + m$.*

Exercice 44.

a) *Déterminez l'équation quadratique f dont les zéros sont -2 et 5, et dont le graphe traverse l'axe Oy à hauteur 3.*

b) *Quelles sont les coordonnées du sommet du graphe de cette fonction ?*

Exercice 45. *On donne la parabole d'équation $y = x^2 + 4x + c$ où c est un nombre réel.*

a) *Quelle est l'ordonnée (en fonction de c) du minimum de cette parabole ?*

b) *Pour quelles valeurs de c, la parabole*

*1. *Coupe-t-elle l'axe des abscisses en deux points distincts ?*

2. *Coupe-t-elle l'axe des abscisses en un seul point ?*

*3. *Ne coupe-t-elle pas l'axe des abscisses ?*

Exercice 46. *Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.*

a) *Calculez les points d'intersection du graphe de f et des axes de référence puis déterminez le minimum de cette fonction.*

b) *Dessinez le graphe de f après avoir étudié sa parité.*

c) *Déduisez de ce graphe ceux des fonctions $g(x) = |f(x)|$ et $h(x) = f(|x|)$.*

***Exercice 47.**

a) *Sur le dessin ci-dessous, représentez le graphe de la fonction $f : x \mapsto y = \frac{1}{2}x^2$.*

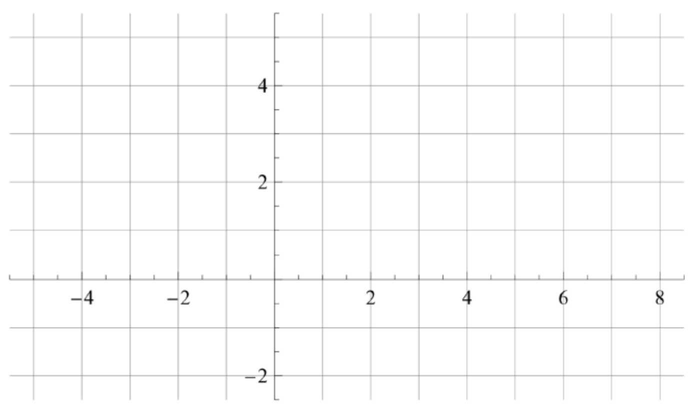
b) *Étudiez la parité de la fonction f.*

c) *Sans calculer, représentez sur le même dessin les fonctions g, h et i définies par*

$g(x) = f(x-3) = \dots\dots\dots\dots$

$h(x) = g(x) - 2 = \dots\dots\dots\dots$

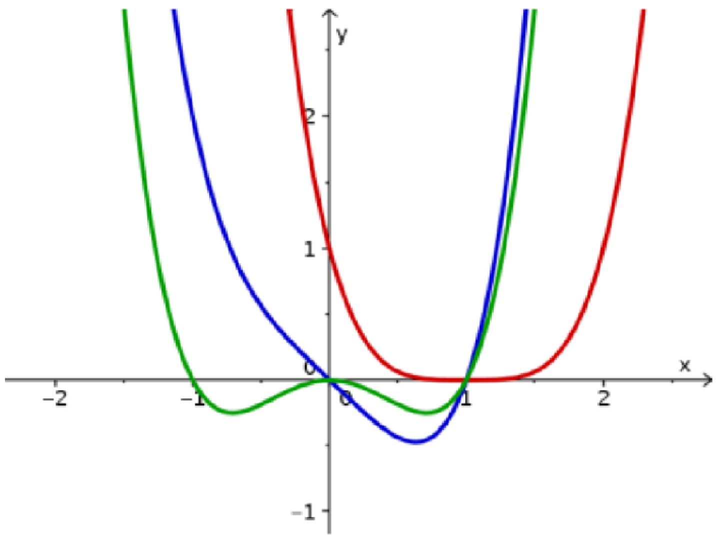
$i(x) = |h(x)| = \dots\dots\dots\dots$

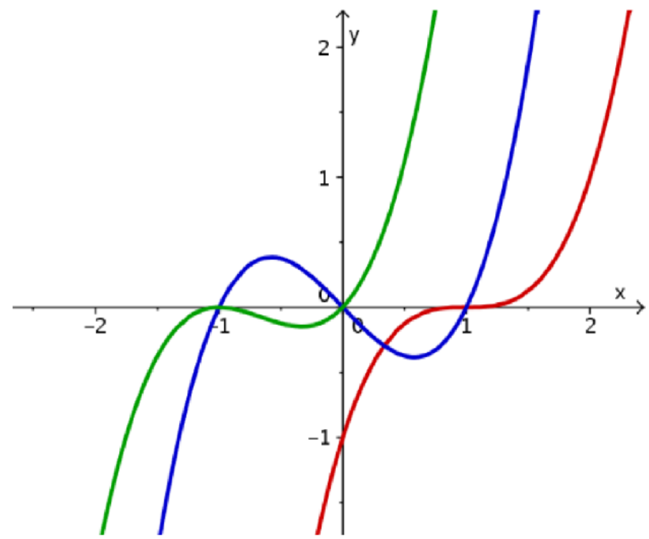


Exercice 48. *Retrouvez la courbe correspondant à la représentation graphique*

$f(x) = (x-1)^4$ $\qquad$ $g(x) = x^4 - x$ $\qquad$ $h(x) = x^4 - x^2$

$i(x) = (x-1)^3$ $\qquad$ $j(x) = x(x+1)^2$ $\qquad$ $k(x) = x^3 - x$





Exercice 49. *Étudiez la parité, trouvez les zéros, puis dessinez le graphe des fonctions polynômes suivantes.*

$f_1 : y = x^3$ $\qquad$ $f_2 : y = -x^3 + 4x$

$f_3 : y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 3$ $\qquad$ $^*f_4 : y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Exercice 50. *Calculez les coordonnées des points d'intersection des deux fonctions suivantes.*

$$x \longmapsto f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 \qquad x \longmapsto g(x) = \tfrac{13}{3}x - 4$$

* **Exercice 51.** *Un météorologue a déterminé que la température T (en Farenheit) pour une certaine période de 24 heures en hiver est donnée par la formule :*

$$T(t) = \frac{1}{20}t(t-12)(t-24), \text{ pour } 0 \leq t \leq 24$$

où t est le temps en heures avec $t = 0$ correspondant à 6 heures du matin.

a) *Quand est-ce que $T > 0$ et $T < 0$?*
b) *Dessinez le graphe de T.*

***Exercice 52.** *Dix jours après une pollution, une biologiste prélève un échantillon d'eau dans une rivière, et estime le nombre de bactéries présentes à 1000. Un autre échantillon, prélevé 5 jours plus tard, ne contient plus de trace de bactérie. La biologiste estime qu'au moment de la* *pollution, la bactérie n'était pas présente non plus, et à dû apparaître progressivement, puis se reproduire de plus en plus. Ensuite, la population a probablement atteint un maximum, avant de diminuer brusquement. La biologiste voudrait estimer la quantité de bactéries 5 jours après la pollution.*

a) *Représentez graphiquement cette situation.*
b) *Repérez les zéros de la fonction représentée.*
c) *Proposez l'expression algébrique d'une fonction polynôme de degré 3 qui pourrait modéliser cette situation.*
d) *Avec ce modèle, estimez le nombre de bactéries 5 jours après la pollution.*

Exercice 53. *Déterminez le domaine de définition, étudiez la parité et faites le tableau des signes des fonctions suivantes :*

$$a)\ y = \frac{1}{3x+9} \qquad b)\ y = \frac{x+4}{2x-2} \qquad c)\ y = \frac{x^2-4}{x^2-9}$$

Exercice 54. *Montrez clairement pourquoi préciser que :*

1) $c \neq 0$; $\qquad$ **2)* $ad - bc \neq 0$.

Exercice 55. *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{-1}{2x}$.

a) *Trouvez le domaine de définition de* f.

b) *Faite le tableau des signes de* f.

c) *Complétez le tableau de valeurs ci-dessous.*

x	0.001	0.01	0.1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	100	1000
y										

Que se passe-t-il avec y *quand* x *s'approche de* 0 *(on note* $x \longrightarrow 0$*) ?*
Que se passe-t-il avec y *quand* x *devient très grand (on note* $x \longrightarrow \infty$*) ?*

d) *Dessinez le graphe de* f *en prenant une unité égale à 4 carreaux. Ne pas oublier la partie du graphe pour laquelle* x *est négatif.*

Exercice 56. *Étudiez les fonctions homographiques suivantes :*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \qquad g(x) = \frac{x-5}{3x+4} \qquad {}^*h(x) = \frac{3-x}{2x-4}$$

$${}^*i(x) = \frac{2x+2}{x+2} \qquad {}^*j(x) = \frac{3x}{-x+1}$$

Exercice 57. *Soient les fonctions* $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ *et*

$$g_1(x) = \frac{3x-5}{4} \qquad {}^*g_2(x) = \frac{-3x+10}{4} \qquad g_3(x) = \frac{x+4}{2}$$

a) *Déterminez les intersections du graphe de f avec celui de chacune des fonctions g_1, $^*g_2$ et g_3.*

b) *Déterminez l'équation des droites de pente $\frac{1}{3}$ qui sont tangentes au graphe de f. *Quels sont les points de contact ?*

Exercice 58. *Inventez une fonction homographique ayant les asymptotes $x = -1$ et $y = 3$.*

Exercice 59. *Soit la fonction homographique* $f(x) = \dfrac{x+b}{cx-3}$ *où b et c sont des nombres réels. Déterminez les valeurs de b et c de manière à ce que le graphe de f passe par le point $P(4;-2)$ et admette l'asymptote verticale d'équation $x = 6$.*

Exercice 60. *Dessinez le graphe de* $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *et déduisez ceux des fonctions $g(x) = |f(x)|$ et $h(x) = f(|x|)$.*

Exercice 61. *Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont fausses. Quand c'est le cas, donnez un contre-exemple.*

a) *Si $x > 1$ et $y > 2$, alors $x + y > 3$*

b) *Si $x < 5$ et $y < 6$ alors $x \cdot y < 30$*

c) *Si $x < 0$, alors $x < x^2$.*

d) *Si $x < y < -2$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.*

Exercice 62. *Écrivez sous forme d'intervalles les inégalités ci-dessous et dessinez ces intervalles sur la droite réelle.*

a) $-5 \leq x \leq 2$ *b)* $0 < x < 7$ *c)* $-6 \leq x < 0$

d) $x < -2$ *e)* $1 < x$ *f)* $x < 0$ *ou* $4 < x < 10$

Exercice 63.

a) *Trouvez tous les x réels tels que* $\dfrac{-2x+3}{5} \leqslant 1$.

b) *Même exercice avec* $\dfrac{x-6}{3} \leqslant \dfrac{2x+3}{2}$.

c) *Déterminez l'ensemble* $E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x+2 > 0 \;\text{ et }\; -2x+6 > 0\}$.

Exercice 64. *Résolvez les inéquations suivantes :*

a) $5x - 7 > 11x + 9$ *b)* $5x + 5 < 5x$ *$^*c)$* $2(4x - 1) \leq 3x - 6$

d) $3(x + 1) - x \leq 1 + 2(1 + x)$ *$^*e)$* $\frac{1}{2}x - 5 > \frac{1}{4}x + 3$ *f)* $-\frac{3}{5}x - 6 < -\frac{2}{5}x + 7$

g) $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$ *h)* $|2x + 5| < 4$

Exercice 65. *Résolvez graphiquement les inéquations suivantes :*

a) $x^2 - 3x - 28 > 0$ *b)* $x^2 \leq 5x - 6$ *c)* $(x + 2)^2 \geq 0$

d) $4x^3 - 10x^2 + 48x < 0$ *e)* $x^3 - 7x - 6 \geq 0$

Exercice 66. *Même exercice :*

a) $|x| > 3$ *b)* $|x - 5| < 2$ *c)* $|-2x + 5| < 3$

d) $\left|\frac{1}{2}x - 1\right| < -\frac{1}{4}x + 2$ *$^*e)$* $|2x - 4| < |x - 5|$ *$^*f)$* $\left|\frac{2}{3}x + 2\right| < |2x - 2|$

Exercice 67.

a) *On considère la fonction* $f : x \longmapsto y = (m - 3)x^2 - 2(3m - 2)x + 7m$*. Déterminez les valeurs de* m *pour lesquelles* f *n'a pas de zéro.*

b) *On considère la fonction* $(p - 2)x^2 + (5p - 1)x + 14p + 7 = 0$ *où* x *est l'inconnue. Pour quelles valeurs du paramètre* p *cette équation admet-elle deux solutions réelles distinctes ?*

Exercice 68. *Résolvez les inéquations suivantes :*

a) $\dfrac{4x^8 - 2x^7}{3x + 5} < 0$ *b)* $\dfrac{(3x + 12)(x + 2)}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$ *c)* $\dfrac{x + 2}{x - 2} > \dfrac{x - 2}{x + 2}$

***Exercice 69.** *Même exercice :*

a) $\dfrac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$ *b)* $\dfrac{x + 1}{x - 1} > \dfrac{x - 1}{x + 1}$

c) $\dfrac{1}{x} \geq x$ *d)* $\dfrac{13}{2 - x} \leq 7 - \dfrac{4}{3x + 1}$

***Exercice 70.** *Pour qu'un médicament soit efficace, il faut que sa concentration dans le sang dépasse une certaine valeur, appelée niveau thérapeutique minimal. Admettons que la concentration* c *(en mg/l) d'un certain médicament* t *heures après que nous l'ayons pris oralement soit donnée par*

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si le niveau thérapeutique minimal est 4 mg/l, déterminez quand ce niveau sera dépassé.

*__Exercice 71.__ *On calcule la distance de freinage d'une voiture d en mètres par rapport à sa vitesse v en km/h avec la fonction $v \mapsto d(v) = 0,006v^2 + 0,2v$.*

Déterminez les vitesses permettant à une voiture de s'arrêter sur une distance inférieure à 11,4 mètres.

Exercice 72. *Trouvez le domaine de définition des fonctions suivantes :*

a) $f_1 : y = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$ *b)* $f_2 : y = \sqrt{x^2 - 9x + 20}$

c) $f_3 : y = \sqrt{(x^2 - 1)(x - 4)}$ **d)* $f_4 : y = \sqrt{(x + 1)(x^2 - 2x - 3)}$

e) $f_5 : y = \sqrt{1 - x^2}$ **f)* $f_6 : y = \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice 73. *Même exercice :*

$$f : y = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \qquad {}^*g : y = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} \qquad {}^*h : y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

Exercice 74. *Soient les fonctions suivantes :*

$$f(x) = 3x^2 - 7 \qquad g(x) = 2x - 1 \qquad h(x) = 3x \qquad i(x) = \frac{1}{x} \qquad j(x) = \sqrt{x}$$

a) *Déterminez* $(f \circ g)(-2)$ *et* $(g \circ f)(-2)$.

b) *Trouvez l'expression des fonctions*

$$g \circ f,\ f \circ g,\ g \circ h,\ h \circ g,\ g \circ g,\ h \circ h,\ i \circ i,\ h \circ i,\ i \circ h \text{ et } i \circ j \circ g.$$

Exercice 75. *Trouvez trois fonctions simples f, g et h telles que* $(f \circ g \circ h)(x) = \dfrac{7}{x^3 + 1}$.

Exercice 76. *Soient les fonctions f, g, et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par*

$$f(x) = 3x^2 - 7, \qquad g(x) = 3x + 2 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{2x - 1}.$$

* **Exercice 77.** *Dans presque tous les langages informatiques, il existe deux fonctions permettant de convertir les caractères en nombres et vice-versa.*

La fonction CHR est définie par :

CHR(65)=« A », CHR(66)=« B », ... , CHR(90)=« Z ».

La fonction réciproque ORD est définie par :

ORD(« A »)=65, ORD(« B »)=66, ... , ORD(« Z »)=90.

Calculez :

a) $ORD(\text{« } M \text{ »})$

b) $(CHR \circ ORD)(\text{« } C \text{ »})$

b) $CHR(ORD(CHR(75)) + 5)$

Exercice 78. *Schématisez les fonctions ci-dessous puis déterminez quelles sont les fonctions bijectives.*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = 2x+1 \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & y = x^2 \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = 28 \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \sqrt{x} \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = x^3 \end{array}$$

Exercice 79.

a) *Trouvez des ensembles X et Y de sorte que chaque fonction $X \longrightarrow Y$ soit bijective et déterminez sa réciproque.*

$$f : x \longmapsto y = f(x) = -2x+3 \qquad g : x \longmapsto y = g(x) = \sqrt{3x}$$
$$h : x \longmapsto y = h(x) = \tfrac{1}{x} \qquad i : x \longmapsto y = i(x) = x^2 - 2x$$
$$^*j : x \longmapsto y = j(x) = x^2 - 4x + 8 \qquad ^*k : x \longmapsto y = k(x) = \frac{x+2}{x-5}$$

b) *Pour les fonctions f, g et i, représentez chaque fonction sur le même graphique que sa réciproque.*

c) *Calculez $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$, $g \circ g^{-1}$, $g^{-1} \circ g$, $h \circ h^{-1}$.*

*__Exercice 80.__ *Déterminez la fonction réciproque $f^{-1}(x)$ de chacune des fonctions ci-dessous :*

a) $f(x) = 3x - 5$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 4$

c) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ *d)* $f(x) = 8x^3$

Exercice 81.

a) Déterminez la réciproque de chacune des fonctions $f : x \longmapsto y = \dfrac{x+1}{2x+1}$ *et* $g : x \longmapsto y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

**b) À quelle condition la fonction* $f : x \longmapsto y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *est-elle sa propre réciproque ?*

Exercice 82. *Complétez le tableau de valeurs des fonctions* $f(x) = \log_2(x)$ *et* $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$*, puis tracez leur graphe dans un repère orthonormé.*

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$							
$g(x)$							

Exercice 83. *Calculez (de tête) les logarithmes suivants :*

a) $\log(100)$ *b)* $\log_2(128)$ *c)* $\log_7(1)$ *d)* $\log_3(-2)$ *e)* $\log_2(\frac{1}{32})$

f) $\log(\frac{1}{10})$ *g)* $\log_9(3)$ *h)* $\log_{16}(4)$ *i)* $\log_{13}(0)$ *j)* $\log_{123}(123)$

k) $\log(\sqrt{10})$ *l)* $\log_2(\sqrt[3]{4})$ *m)* $\log_3(\frac{1}{\sqrt{27}})$

*__Exercice 84.__ *Démontrez les trois autres règles de calcul des logarithmes.*

Exercice 85. *Résolvez les équations suivantes à l'aide des règles de calcul :*

a) $10^x = \pi$ *b)* $10,1562^x = 1$ *c)* $10^{2x-5} = \frac{3}{4}$

d) $a^x a^3 = a$ *e)* $10 \cdot 2^x = 5$ *f)* $2^x = 3$

g) $4 \cdot 2^{x-3} = 5$ *h)* $5^{3x} = 2 \cdot 5^{x+1}$ *i)* $x = 2\log_3(\frac{2}{3}) - \log_3(12)$

j) $\log(x-1) = 2$ *k)* $\log(x) + \log(x+3) = 1$ *l)* $\log(x+1) - \log(x-1) = 1$

m) $\log(3x) = 2$ *n)* $2\log(x) = -4$ *0)* $\log(x^2 - 21) = 2$

p) $\log(4x-1) = -2$ *q)* $3\log(2x) = 9$ *r)* $\log(x) + 5 = 2$

s) $\log(x^3) = 6$ *t)* $\log(2x) \cdot \log(5x) = 0$ *u)* $\log^2(2x) = 9$

v) $\log^2(x) - \log(x) - 2 = 0$ *w)* $\log^2(x) - 6\log(x) = 0$ *x)* $\log(\log(x)) = 1$

***Exercice 86.** *Sur l'échelle de Richter, la magnitude R d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par la relation :*

$$R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I_0 est une intensité minimale donnée.

a) *Si l'intensité d'un tremblement de terre est $1000 \cdot I_0$, calculez R.*
b) *Exprimez I en fonction de I_0 et R.*
c) *Les plus grandes magnitudes de séismes enregistrées se sont situées entre 8 et 9 sur l'échelle de Richter. Calculez les intensités correspondantes en fonction de I_0.*
d) *Au centre des États-Unis, l'aire A (en m^2) touchée par un séisme est liée à la magnitude par la formulre $R = 2.3 \cdot \log(A + 14000) - 6.6$. Calculez l'aire de la région touchée pour une magnitude 4.*
e) *Le nombre annuel moyen n de séismes qui ont une magnitude entre R et $R + 1$ vérifie plus ou moins la formule $\log(n) = 7.7 - 0.9R$. Combien y en a-t-il en une année de séismes de magnitude comprise entre 4 et 5 ?*

Exercice 87. Études de fonctions

$$x \longmapsto y = f(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 3^x \qquad x \longmapsto y = g(x) = \log(x-1)$$

$$x \longmapsto y = h(x) = \frac{3x+2}{4x-4} \qquad x \longmapsto y = i(x) = \tfrac{1}{3}x^4 - \tfrac{10}{3}x^2 + 3$$

$$x \longmapsto y = j(x) = \frac{-x^2 - x + 6}{2x+4}$$

Étudiez ces fonctions en reprenant les points vus dans la section des fonctions homographiques, et en ajoutant l'étude de la parité.

Exercice 88. *Soient les fonctions $f : x \longmapsto y = x^2 - 3$ et $g : x \longmapsto y = \frac{2x}{x-2}$.*

a) *Calculez les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g.*
b) *Étudiez les fonctions f et g et tracez leur graphe dans un même système d'axes.*
c) *Trouvez les équations des droites de pente -4 qui sont tangentes au graphe de g.*
d) *Calculez $(g \circ f)(x)$.*
e) *Déterminez les fonctions réciproques f^{-1} et g^{-1} de f et g en les rendant bijectives au besoin.*

Exercice 89. *Résolvez :*

a) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0,9$ *b)* $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) = 1$