LDDR Niveau 1 : Analyse Combinatoire

EXERCICE 1.17

1) $P_7 = 7! = 5040$ b) $(7-1)! = 6! = 720$

EXERCICE 1.18

1) On permute 5 lettres : $5! = 120$

2) On permute 7 lettres dont les 3 sont identiques

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

3) On permute 12 lettres dont le O apparaît 3 fois, le I 2 fois, le L 2 fois, et le C 2 fois

$$\frac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 9979200$$

EXERCICE 1.19

a. _ _ _ _ _ $\Rightarrow 5! = 120$

5 possibilités 4 3 2 1

b. On commence par choisir 5 boules parmi 12 sans tenir compte de l'ordre. On a $\binom{12}{5}$ manières de le faire. On les place ensuite dans les 5 boites et on a $5!$ manières de les placer. Ainsi le nombre de manières différentes est $\binom{12}{5} \cdot 5! = 792 \cdot 120 = 95040$

c. _ _ _ _ _ $\Rightarrow 2^5 = 32$

2 possibilités = blanche ou noir 2 2 2 2

d. On range dans les 20 boites 7 boules blanches, 10 boules noires et 3 boites vides. Le nombre de manières différentes correspond au nombre de permutations de 7 boules blanches, 10 boules noires et 3 boites vides (permutation avec répétition) et vaut donc $\frac{20!}{7!\,10!\,3!} = 22170720$

ou : $C_7^{20} = \binom{20}{7}$ possibilités pour placer le blanches (l'ordre n'est pas important)

$C_{10}^{13} = \binom{13}{10}$ pour les noires

$C_7^{20} \cdot C_{10}^{13} = 22170720$

e. On a les possibilités:

9 boules noires		$\binom{9}{9}=1$ possibilité
8 —"— —"—	1 boule blanche	$\binom{9}{1}=9$ —"—
7 —"— —"—	2 boules —"—	$\binom{9}{2}=36$ —"—
6 —"— —"—	3 —"— —"—	$\binom{9}{3}=84$
5 —"—	4 —"—	$\binom{9}{4}=126$ —"—
4 —"—	~~5~~ —"—	$\binom{9}{5}=126$ —"—
3 —"—	6 —"—	$\binom{9}{6}=84$

total: $1+9+36+84+126+126+84=466$ possibilités

f. Si les 2 boites médianes contiennent chacune une boule blanche, il nous reste à placer 8 boules blanches et 10 boules noires dans les 18 boites restantes: $\binom{18}{8}=\binom{18}{10}=43758$

EXERCICE 1.20

a. Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 5 personnes parmi 40. Il y a donc $\binom{40}{5}=658000$ possibilités

b. Cela correspond à choisir 3 dames parmi les 25 et donc, 2 hommes parmi les 15. Il y a donc $\binom{25}{3}\binom{15}{2}=241500$ possibilités

c. Avec 3 dammes: $\binom{25}{3}\cdot\binom{15}{2}=241500$
Avec 4 dammes: $\binom{25}{4}\binom{15}{1}=189750$
Avec 5 dammes: $\binom{25}{5}\binom{15}{0}=53130$
Au total: il y a donc $241500+189750+53130=$
$=484380$ possibilités

EXERCICE 1.21

Il s'agit de trouver le nombre de permutation de 8 éléments sachant qu'on a 3 sortes de pavillon (4 v, 3 b, 1 b) Ce nombre est
$\frac{8!}{4!\,3!\,1!}=280$

EXERCICE 1.22

EXERCICE 1.23

a) Pour un ordre des lettres fixés, on a le choix de 2 voyelles parmi 6 et de 3 consonnes parmi 20 : $\binom{6}{2}\binom{20}{3} = 17100$ possibilités. En outre on a $5! = 120$ ordres possibles des 5 lettres. On a donc au total : $17100 \cdot 120 = 2052000$ possibilités

b) Les mots doivent contenir la lettre B et 2 encore consonnes différentes et 2 voyelles différentes. Pour un ordre des lettres fixés, on a le choix de 2 voyelles parmi 6 et de 2 consonnes parmi 19. $\binom{6}{2} \cdot \binom{19}{2} = 2565$ En outre on a $5! = 120$ ordres possibles des lettres. On a donc au total $2565 \cdot 120 = 307800$ possibilités

EXERCICE 1.24

1) Pour un jouer on a $\binom{36}{9} = 94143280$ possibilités

2) Pour le 1er jouer il y a $\binom{36}{9}$ possibilités. Pour le 2e jouer il reçoit 9 cartes parmi les 27 restantes il y a donc $\binom{27}{9}$ possibilités. Pour le 3e jouer il reçoit 9 cartes parmi les 18 restantes, il y a donc $\binom{18}{9}$ possibilités. Pour le 4e jouer, il reçoit 9 cartes parmi 9 restantes, il y a donc $\binom{9}{9} = 1$ possibilité. Comme l'ordre de distributions des cartes est fixé, au total on a :
$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9}\binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = 2{,}145 \cdot 10^{19} \text{ possibilités}$$

3) Si on a les 4 valets dans une donne, il y a $\binom{32}{5}$ possibilités pour les 5 autres cartes. Alors $\binom{32}{5} = 201376$ possibilités

4) Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes par 36 est $\binom{36}{5} = 376992$. Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes sans aucun as est $\binom{32}{5} = 201376$ Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes contenant au moins un as est $\binom{36}{5} - \binom{32}{5} = 175616$

EXERCICE 1.25

1) Il s'agit d'une combinaison de 5 parmi 11 personnes.
$\binom{11}{5} = 462$ possibilités

2) · si le couple vient les 2 places sont occupées: $\binom{9}{3}$
· si il ne vient pas on doit choisir 5 personnes parmi 9 : $\binom{9}{5}$ Alors au total: $\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 210$ possibilités

3) · Si aucune de ces personnes vient: $\binom{9}{5}$
· Si seulement une vient $\binom{9}{4} \times 2$

Au total $\binom{9}{5} + 2 \cdot \binom{9}{4} = 378$ possibilités

EXERCICE 1.26

Il s'agit de permutations avec répétitions. Tout d'abord, on a les 3 groupes qu'on permute de tous les façons: $3! = 6$. Ensuite, à l'interieur des 3 groupes de livres, on a respectivement $5!$ $4!$ et $3!$ permutations possibles. Au total $5!4!3!$ Ainsi tout ensemble, il y a $6 \cdot 5!4!3! = 103680$