CALCUL DE LIMITE QUAND $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

- **Limite d'une fonction continue en a :** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+x) = 8+2 = 10$ ii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- **Limite du quotient de deux fonctions** $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

a) dénominateur non nul, $\lim\limits_{x\to x_0} D(x) \neq 0$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{N(x_0)}{D(x_0)}$

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1} = \dfrac{2}{1} = 2$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+2} = \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)+2} = 0$ iii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{4}{\sqrt{2}-1}$

b) numérateur non nul et dénominateur nul $\lim\limits_{x\to x_0} D(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} N(x) \neq 0$

On a trois cas possibles :

i. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ii. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ iii. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x+1}$ On remplace x = -1 pour vérifier que nous avons ce cas. On trouve $\dfrac{-3}{0}$.

On comprend que la limite est «∞» On construit le tableau de signe de la fonction:

	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x-1		-	|	-	0	+	
x+1		-	0	+	|	+	
f(x)		+	//	-	0	+	

On conclut : $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2x-1}{x+1}$ = +∞ et $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{2x-1}{x+1}$ = -∞Donc $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x-1}{x+1}$ n'existe pas!

ii. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ On remplace x = 2. On trouve $\frac{-1}{0}$.On comprend que la limite est «∞»

On construit le tableau de signe de la fonction:

	-∞	1		2		3		+∞
3-x	+	|	+	|	+	0	-	
x^2-3x+2	+	0	-	0	+	|	+	
f(x)	+	//	-	//	+	0	-	

On conclut : $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ = -∞ et $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ = +∞. Donc $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ n'existe pas!

iii. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$. On remplace x = 1. On trouve « $\frac{-2}{0}$». On comprend que la limite est «∞»

On construit le tableau de signe de la fonction:

	-∞	-1		1		2		+∞
x^2-x-2	+	0	-	|	-	0	+	
$(x-1)^2$	+	|	+	0	+	|	+	
f(x)	+	0	-	//	-	0	-	

On conclut : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ = -∞ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ = -∞ Donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ = - ∞

c) numérateur et dénominateur sont nuls

$\lim\limits_{x\to x_0} D(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to x_0} N(x) = 0$

- *N(x) et D(x) sont des polynomes :* **Il faut factoriser**

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x}$. On remplace x = 0. On trouve $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x-2)$ = -2

ii. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$. On remplace x = 2. On trouve $\frac{0}{0}$.

On factorise : $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{(x+2)}{(x-3)}$. Donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)}{(x-3)} = -4$.

- *N(x) et D(x) ne sont des polynômes*

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{4}$

ii. $\lim\limits_{x\to 20} \dfrac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{x-4}-4} = \lim\limits_{x\to 20} \dfrac{(\sqrt{x+5}-5)(\sqrt{x+5}+5)(\sqrt{x-4}+4)}{(\sqrt{x-4}-4)(\sqrt{x+5}+5)(\sqrt{x-4}+4)} = \lim\limits_{x\to 20} \dfrac{(x-20)(\sqrt{x-4}+4)}{(x-20)(\sqrt{x+5}+5)} =$

$\lim\limits_{x\to 20} \dfrac{\sqrt{x-4}+4}{\sqrt{x+5}+5} = \dfrac{4}{5}$

- *Fonctions trigonométriques*.

Si on vérifie que le résultat est une **forme indéterminée** on essaie de factoriser. Très souvent on utilise les limites : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Identités utiles

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ $\quad$ $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$ $\quad$ $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}$.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad$ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ $\quad$ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)}=1\cdot 0=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin(3x)}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}=3\cdot 1=3$

Règles de calcul

Soit c $\in\mathbb{R}$ et k un entier strictement positif :

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$

$(+\infty)+c=+\infty$

$\infty\cdot\infty=\infty$

$\infty\cdot c=\infty\ (c\neq 0)$

$(\infty)^k=(\infty)$

$\sqrt{+\infty}=(+\infty)$

$\dfrac{\infty}{c}=\infty$

$\dfrac{\infty}{0}=\infty$

$\dfrac{c}{\infty}=0$

$\dfrac{0}{\infty}=0$

Plus précisément :

- $\dfrac{\text{nbre}_+}{+\infty}=0_+\quad\dfrac{\text{nbre}_-}{-\infty}=0_+\quad\dfrac{\text{nbre}_+}{-\infty}=0_-\quad\dfrac{\text{nbre}_-}{+\infty}=0_-$
- $\dfrac{\text{nbre}_+}{0_+}=+\infty\quad\dfrac{\text{nbre}_-}{0_-}=+\infty\quad\dfrac{\text{nbre}_+}{0_-}=-\infty\quad\dfrac{\text{nbre}_-}{0_+}=-\infty$

__Exemples :__

i. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$. On remplace x = -1 et on trouve $\dfrac{-3}{0}$. La question est si on a 0^+ ou 0^-. Comme le dénominateur est toujours positif on a 0^+ et donc $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}=-\infty$.

__Remarque :__ On pourrait directement faire le tableau des signes de la fonction.

ii. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-4}{x+1}$. On remplace x = -1 et on trouve $\frac{-3}{0}$. Mais dans ce cas le signe de dénominateur n'est unique. Alors on prend les deux cas :

$x > -1 \Leftrightarrow x + 1 > 0$: Alors on a le cas $\frac{nbre_-}{0^+}$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-4}{x+1} = -\infty$,

$x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$: Alors on a le cas $\frac{nbre_-}{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2-4}{x+1} = +\infty$,

Remarque : On pourrait directement faire le tableau des signes de la fonction.

iii. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)(x-1)}$. Encore une fois on trouve $\frac{-3}{0}$. Il faut trouve le signe de $(x+1)(x-2)(x-1)$ autour de x = -1.

On fait le tableau de signe pour le produit $(x+1)(x-2)(x-1)$:

	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x+1		-	0	+	|	+	0	+	
x-1		-	|	-	0	+	|	+	
x-2		-	|	-	|	-	0	+	
produit		-	//	+	//	-	//	+	

Donc pour x > -1 on a : $\frac{nbre_-}{0^+}$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)(x-1)} = -\infty$

Pour x < -1 on a : $\frac{nbre_-}{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)(x-1)} = +\infty$

Alors la limite demandée n' existe pas !

Remarque : On pourrait directement faire le tableau des signes de la fonction.

iv. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$. On cherche la limite quand $x \to 2$.

En remplaçant on trouve $\frac{-2}{0}$. Donc le résultat est ∞ mais pour déterminer le signe il faut faire le tableau de signes de la fonction f. Malheureusement les zéros du dénominateur ne sont pas entier ou rationnel donc c'est très difficile de trouver son signe. Mais grâce aux règles de calcul on a besoin que le signe du dénominateur !!

	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
x^2-4	+	0	-	0	+	

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Donc la limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas

- **Formes indéterminées:**

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty\cdot 0 \qquad \infty - \infty \qquad 0^0$$

Il faut factoriser ou transformer la fonction.

CONTINUITE DE LA FONCTION f en $x_0 \in \mathbb{R}$

Definition : On dit que la fonction f est **continue** en $x_0 \in D_f$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si f n'est pas continue en un point x_0 de D_f on dit qu'elle est **discontinue** en x_0. Alors un cas des cas suivants est vérifié:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas   ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

- **Fonctions définies par morceaux**

On examine toujours si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemples:

i. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 4 & 2 < x \leq 3 \\ -2x + 8 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$. Df = [1,4].

Pour $\underline{x_1 = 1}$ on a :

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2+3x-2) = 0$ et $f(1) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$., donc f est continue en x = 1

Pour $\underline{x_2 = 2}$ on a :

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2+3x-2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} (2x-4) = 0$ et $f(2) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, donc f est continue en x = 2.

Pour $\underline{x_3 = 3}$ on a :

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x-4) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-2x+8) = 2$ et $f(3) = 2$, alors $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$, donc f est continue en x = 3.

Pour $\underline{x_4 = 4}$ on a:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (-2x+8) = 0$ et $f(4) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$ donc f est continue en x = 4.

Alors f est continue partout sur D_f

CALCUL DE LIMITE QUAND $x \to \infty$

Limite d'une fonction polynôme :

En $+\infty$ (resp $-\infty$), toute fonction polynôme a la même limite que son terme de degré le plus élevé.

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3-2x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$! Puissance impaire

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^6-3x^3+x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^6) = +\infty$! Puissance paire

v. $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3-3x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

Limite d'une fonction rationnelle :

En $+\infty$ (resp $-\infty$), toute fonction rationnelle a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0)}{(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ +\infty \text{ ou } -\infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

Exemples :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x}{3x^2-5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3}$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+2x}{3x^3-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^3} = \dfrac{-2}{3}$

ASYMPTOTES

Asymptote verticale

La droite $x = x_0$ est dite **asymptote verticale** (A. V.) de la fonction *f* si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

- Alors on cherche les asymptotes verticales aux points ou la fonction n'est pas définie.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} D(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} N(x) \neq 0$ on a une asymptote verticale $x = x_0$.

Asymptote affine (Omplique)

La droite d'équation y = mx + h est une asymptote affine (A. A.) de la courbe représentative de la fonction f si

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0$$

Les valeurs m et h sont calculés avec les formules suivantes :

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad h = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \qquad \text{(idem en } -\infty)$$

Remarque : Si m tend vers l'infini, alors il n'y a pas d'asymptote affine. Inutile donc d'essayer de calculer h.

Remarque : Si m = 0 on cherche pour asymptote horizontale.

Attention ! L'asymptote affine n'est pas forcément la même en $+\infty$ et en $-\infty$. Il faut donc étudier les deux cas. (C'est en particulier le cas avec des fonctions exponentielles ou la fonction arctan(x)).

Asymptote affine (Omplique) (d' une fonction $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$)

- Deg(P) < deg(Q) : AH y = 0 (axe des x)

  $f(x) = \dfrac{x+4}{-x^3+1}$, AH : y = 0

- Deg(P) = deg(Q) : AH y = quotient des coefficients des plus grandes puissances.

f(x) = $\frac{-3x+4}{2x+3}$. AH : y = $\frac{-3}{2}$

- Deg(P) = deg(Q) +1 , on effectue la division euclidienne P :Q. Le quotient de cette division est l'asymptote oblique.

f(x) = $\frac{x^2+2x-1}{x-3}$ = x+5 + $\frac{14}{x-3}$. AO : y = x+5