

SERIE 9: Eq. Différentielles - Taylor Solutions

EXERCICE 1

$$2xy + 6x + (x^2 - 4)y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)y' = -2xy - 6x \\ = -2x(y + 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y+3} = \frac{-2x}{x^2-4} \quad x \neq \pm 2$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y+3} = \frac{-2x}{x^2-4} dx$$

$$\ln |y+3| = -\ln |x^2-4| + C$$

$$\Leftrightarrow \ln |y+3| + \ln |x^2-4| = C$$

$$\Leftrightarrow \ln |(y+3)(x^2-4)| = C$$

$$\Leftrightarrow (y+3)(x^2-4) = A$$

$$y+3 = \frac{A}{x^2-4}$$

EXERCICE 2

$$\sin x dx + y dy = 0 \quad y(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow y dy = -\sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 = \cos x + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2\cos x + C}$$

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = \sqrt{2+C} \Leftrightarrow C = -1$$

$$y = \sqrt{2\cos x - 1}$$

EXERCICE 3.

$$y' - \frac{1}{x}y = x^3 \quad x > 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad g(x) = x^3$$

$$y = p(x) + c u(x)$$

$$u(x) = e^{-\int f(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$p(x) = c(x) \cdot u(x)$$

$$c(x) = \int \frac{x^3}{x} dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$$

$$p(x) = \frac{1}{3} x^3 \cdot x = \frac{1}{3} x^4$$

$$y = \frac{1}{3} x^4 + C \cdot x$$

EXERCICE 5

Soit $x(t)$ la quantité de Radium au moment t . On sait $\frac{dx}{dt} = -kx$ Alors

$$x = x_0 e^{-kt} \text{ Avec } x(0) = 50 \text{ on obtient}$$

$$x = 50 e^{-kt} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{x}{50}\right) / -k \text{ Avec}$$

$$x(1600) = 25 \text{ on a: } 25 = 50 e^{-1600k}$$

Donc

$$1600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \Leftrightarrow k = -\frac{\ln 2}{1600}$$

Quand $x = 45$ on a:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln(x/50)}{-k} = \frac{\ln(45/50)}{-\ln(2)/1600} = -1600 \cdot \frac{\ln(8/10)}{\ln 2} = \\ &= 1600 \cdot \frac{\ln(10/8)}{\ln(2)} \approx 243.2 \end{aligned}$$

Alors ça sera presque dans 243.2 ans pour que la sample contienne 45g.

EXERCICE 6 (C.)

A: est la formule générale

B: C'est le x qui est remplacé par 5 par la

D: (x^2-5) au lieu de $(x-5)^2$

EXERCICE 7.

A car (B) (C) ne sont pas de degré 2

A est le seul possible Comme le graph

A semble droite on suppose que le coefficient de $(x+\frac{1}{2})^2$ est 0

EXERCICE 8.

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x$$

$$\sin \pi x = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!} (-\pi^2) + \frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!} (\pi^4) + \dots$$

$$= 1 - \pi^2 \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!} + \pi^4 \frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!} + \dots$$

$$\sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = 1 - \pi^2 \frac{(\frac{1}{10})^2}{2!} + \pi^4 \frac{(\frac{1}{10})^4}{4!} + \dots =$$

$$= 1 - 0.0493 + 0.0004 = 0.9511$$

EXERCICE 9.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \text{ et alors}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\text{Donc } \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

EXERCICE 10 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$|R_3(x)| = \left| \frac{6}{(1+c)^4} \frac{x^4}{4!} \right| = \frac{6}{(1+c)^4} \frac{x^4}{4!} = \frac{x^4}{4(1+c)^4} \text{ où } c \in [0, x]$$

$$|R_3(x)| \leq \frac{x^4}{4} \text{ quand } c=0$$

On doit avoir $\frac{x^4}{4} < 5 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow \underline{x < 0.211}$

EXERCICE 11. On sait que

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } x \sin x &= x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

EXERCICE 12 Comme $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ et

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} \text{ on obtient}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \right)}{2} = \\ &= \frac{2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{64x^6}{720} + \dots}{2} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \dots - x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3} + \frac{2x^2}{45} + \dots \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

EXERCICE 4 Cette équation est linéaire avec x en fonction de y ; Alors on a:

$$\frac{dx}{dy} + 2x = -e^{-y} \quad f(y) = 2 \quad g(y) = -e^{-y}$$

$$x = p(y) + c u(y)$$

$$u(y) = e^{-\int f(y)} = e^{-\int 2 dy} = e^{-2y}$$

$$p(y) = c(y) \cdot u(y)$$

$$c(y) = \int \frac{g(y)}{u(y)} dy = \int \frac{-e^{-y}}{e^{-2y}} dy = - \int e^y dy = -e^y$$

$$\text{Donc } p(y) = -e^y \cdot e^{-2y} \Rightarrow p(y) = -e^{-y}$$

$$\text{et } \underline{x = -e^{-y} + c e^{-2y}}$$