SERIE 10

Exercice 1

Dans $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base standard de V_2, on considère $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.

a. Que sont les composantes de $\vec{v}$ dans les bases$(\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2})$,$(\overrightarrow{e_2}\ ,\ \overrightarrow{e_1})$ et$(2\overrightarrow{e_1}\ ,\ 6\overrightarrow{e_2})$?

b. Montrer que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ forment une base de V_2.

c. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}\ ,\ \overrightarrow{v_2})$.

Exercice 2

Dans chacun des cas déterminer si l'application est linéaire. Si possible la décrire en termes géométriques.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

d. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y+1 \end{pmatrix}$

e. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

f. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

g. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$

h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + 3y$

i. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y-2z \end{pmatrix}$,

où a est un réel fixé.

Exercice 3

Deux applications linéaires f et g de V_2 dans V_2 sont données par leur effet sur les vecteurs $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\vec{b} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ (avec $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ une base de V_2) :

$$f(\vec{a}) = -\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2}\ ,\ f(\vec{b}) = -5\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2}\ ,\ g(\vec{a}) = 2\overrightarrow{e_1} - 6\overrightarrow{e_2} \text{ et } g(\vec{b}) = 7\overrightarrow{e_1} - 21\overrightarrow{e_2}$$

a. Déterminer les composantes des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$, $g(\overrightarrow{e_1})$, $g(\overrightarrow{e_2})$, $f(\vec{v})$, $g(f(\vec{v}))$, où $\vec{v} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

b. Déterminer relativement à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, les matrices F de f, G de g et M de $g * f$.

c. En utilisant M, vérifier les composantes de $g(f(\vec{v}))$.

KALAITZI FANI 0763853810 kalaitzi.f@gmail.com

Exercice 4

Déterminer la matrice, par rapport à la base standard, de chacune des transformations linéaires de V_2, suivantes puis utiliser cette matrice pour calculer l'image de $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.

a. Homothétie de centre O et de facteur k
b. Rotation de $+30°$ autour de l'origine
c. Projection orthogonale sur l'axe $a : x - 3y = 0$
d. Symétrie d'axe a
e. Projection sur l'axe a dans la direction $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$
f. Affinité axiale, d'axe a, qui envoie le point $R\,(2;2)$ sur $R'\,(1;-1)$.

Exercice 5

Décrire géométriquement les transformations associées aux matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6

On travaille dans le plan muni d'un repère métrique.

a. Donner la matrice S_α de la symétrie axiale dont l'axe fait un angle de α avec l'axe x.
b. Donner la matrice R_φ de la rotation d'un angle φ.
c. Pronostiquer et vérifier par calcul matriciel les résultats de $S_\alpha \cdot S_\alpha$ et $R_\alpha \cdot R_\beta$.
d. Vérifier que $S_\alpha \cdot S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$.

Exercice 7

Une application linéaire est donnée par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Vérifier que cette application admet au moins une valeur propre.

Exercice 8

Dans la base standard, on donne la matrice de l'application $f : V_2 \to V_2 : F = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer ses valeurs propres ainsi que ses vecteurs propres correspondants.
b. Interpréter géométriquement l'application f.

Exercice 9

Proposer la matrice $2x2$ d'une affinité axiale de rapport -3. Indiquer son axe et sa direction.

Exercice 10

Une application linéaire f de V_2 dansV_2 est donnée par sa matrice $F = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, dans la base standard $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

a. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
b. Choisir une base propre $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ et donner la matrice de f dans cette base (F').
c. Chercher l'image des vecteurs $\vec{a} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{p_2}$ de deux manières :
d. En travaillant dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec la matrice F
e. En travaillant dans la base $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ avec la matrice F'

Exercice 11

Une application linéaire de V_2 dans V_2 est donnée par sa matrice relativement à une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^{-1}, A^2, A^3.
b. Calculer les valeurs et vecteurs propres de f et $f * f$.
c. Choisir une base $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ de vecteurs propres et donner dans cette base la matrice B de f.
d. Calculer B^{-1}, B^2, B^3 et B^n.
e. Déterminer la matrice P de l'application p (passage) qui envoie $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ sur $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
f. Déterminer l'inverse de P, soit P^{-1}.
g. En utilisant la base propre de f et les matrices de passage P et P', calculer A^n.
h. Vérifier le résultat pour $n = -1$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 12

Soit l'application linéaire f de V_2 dans V_2 donnée par la matrice $F = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer les valeurs et vecteurs propres de f, de $f * f$ et de f^{-1}.

KALAITZI FANI 0763853810 kalaitzi.f@gmail.com

Exercice 13

a. Trouver les caractéristiques géométriques de la transformation vectorielle f de matrice

$$F = \begin{pmatrix} -5/13 & 12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

b. Trouver la matrice de la transformation g telle que $g * f$ soit la symétrie d'axe $y = x$.

c. Interpréter géométriquement g.