Université de Neuchâtel
Faculté de Sciences économiques

Mathématiques appliquées II
Session d'examens: Juin 2017
Date: 13.06.2017
Durée: 2 heures
Total: 50 points

professeur: Giuseppe Melfi

Nom et Prénom: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille manuscrite format A4. Aucune autre documentation ni dispositif électronique ne sont autorisés.
Calculatrice : Autorisée
Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.
Toutes les réponses doivent être rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.

Problème 1 (7 pts)

Étant donné les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calculez $A^2 - B^2$ et $(A+B)(A-B)$.

b) Lorsque c'est possible, calculez $B^T C$ et D^{-1}.

Problème 2 (8 pts)

Un dirigeant d'une société d'assurances a récemment voyagé à Londres, Paris et à Rome. Il a payé 180 Fr., 230 Fr. et 160 Fr. par nuit pour s'héberger dans Londres, Paris et Rome, respectivement, et il a reçu la facture des trois hôtels pour un total de 2660 Fr.. Pour ses repas, il a dépensé 110 Fr., 120 Fr. et 90 Fr. par jour à Londres, Paris et à Rome, respectivement, et ses dépenses totales pour les repas sont de 1520 Fr.

a) En sachant qu'il a passé autant de jours à Londres qu'il en a passé à Paris et à Rome réunis, formulez un système d'équations linéaires pour déterminer combien de jours le dirigeant a passé dans chaque ville. Indiquez clairement ce que chaque variable dans votre système représente.

b) Utilisez la règle de Cramer pour trouver la bonne solution.

Problème 3 (5 pts)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel $\mathbf{V}$. Est-ce que les vecteurs $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}), (3\vec{v}-\vec{w})$ et $(2\vec{w})$ sont aussi linéairement indépendants? Pourquoi? Pourquoi pas?

Problème 4 (10 pts)

Une compagnie farmaceutique détient les droits de commercialiser un nouveau médicament. Un distribuetur suisse est intéressé à ce medicament et il a négocié un prix p_1 (en francs) qui peut s'exprimer en fonction de la quantité q_1 commandée (en milliers de doses)

$$p_1 = 18 - 2q_1.$$

Un distributeur pour les marchés étrangers est également intéressé à commercialiser ce médicament et il a négocié avec la compagnie un prix p_2 en fonction de la quantité q_2 commandée qui s'exprime par la formule

$$p_2 = 10 - \frac{1}{5}q_2.$$

En sachant que le coût de production est de 4 francs par dose,

a) Combien de doses doit produire la compagnie afin de maximiser le bénéfice? Justifiez votre réponse.

b) À quel prix le médicament sera vendu au distributeur suisse? Au distributeur étranger?

c) Quel sera le bénéfice que la compagnie pourra tirer de la production et de la vente de ce médicament?

Problème 5 (10 pts)

Dans le domaine des capsules de café, les marques Miscafé et Monarabica se concurrencent avec des produits occupant la même niche de marché. La demande quotidienne q de capsules Miscafé (en milliers de capsules) dépend du prix p_1 de la capsule, mais aussi du prix p_2 de la capsule de Monarabica selon la relation

$$q(p_1, p_2) = 400 p_1^{-1,5} p_2.$$

a) Si le prix de la capsule de Miscafé est de 0,50 Fr. et de Monarabica est de 0,40 Fr. quelle est la demande de capsules Miscafé?

b) Calculez l'élasticité-prix de la demande de capsules Miscafé, ainsi que l'élasticité-prix croisé.

c) Dans les mêmes conditions que le point a), en calculant la différentielle de la fonction demande, de combien de capsules la demande de Miscafé varie (en plus ou en moins) pour chaque centime de franc d'augmentation des deux produits (en supposant que les deux producteurs augmentent leur prix simultanément) ?

d) Supposons que le concurrent Monarabica garde le prix de la capsule à 0,40 Fr. de manière durable, indépendammant des variations de prix de Miscafé. Si Miscafé augmente le prix de la capsule logiquement la demande de capsules Miscafé diminue. Afin d'augmenter le chiffre d'affaire, Miscafé doit-il augmenter ou diminuer le prix de la capsule? Justifiez votre réponse en considérant la fonction chiffre d'affaires de Miscafé

$$R(p) = p \cdot q(p_1, p_2).$$

Problème 6 (10 pts)

Pour chacune des déclarations suivantes, choisissez **toutes les réponses** qui s'appliquent. (**Donnez vos réponses sur les feuilles séparées**)

1. Quelle(s) matrice(s) est/sont idempotente(s)?

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -15 & -5 \end{bmatrix} \qquad d) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Indiquez la/les bonne(s) reponse(s) pour la forme matricielle de la fonction quadratique suivante:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\ x_2^2 + 3x_3^2 + 4\ x_1x_2 - 6\ x_1x_3 + 8\ x_2x_3$$

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

d) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

e) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

3. Un ensemble de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^5$ est linéairement indépendant.

   a) Oui b) Non c) On peut pas dire.

4. Un ensemble de 6 vecteurs linéairement indépendants engendre $\mathbb{R}^6$.

   a) Oui b) Non c) On peut pas dire.

5. Le déterminant de la matrice M suivante a une valeur D_M

$$D_M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

   a) $D_M < 0$ b) $D_M = 0$ c) $D_M > 0$.

6. Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c, d, e\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. La fonction f de A à B est definié comme suit:

$$f(1) = b, \quad f(2) = c, \quad f(3) = a, \quad f(4) = e$$

Sachant que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$:

a) f est une fonction surjective de A à B.

b) f peut être une fonction bijective de A à B.

c) f est une fonction injective de A à B.

d) Tout ce qui précède.

e) Aucune de ces réponses.

7. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Soit $h = g \circ f : X \to Z$. Supposons que g soit **bijective**.

a) h peut être une fonction surjective de X à Z.

b) h est une fonction injective de X à Z.

c) h peut être une fonction bijective de X à Z.

d) Tout ce qui précède.

e) Aucune de ces réponses.

8. L'équation paramétrique de la droite reliant les points $P(2, 1, -1)$ et $Q(0, 3, 1)$:

a) $x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$ b) $x(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$

c) $x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t$ d) $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} t$

e) Aucune de ces réponses.

9. L'équation non-paramétrique du plan suivant:

$$x(t, s) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} s$$

a) $z = 0$ b) $x = 2y + z$ c) $5x + 2y + z = 0$ d) $x = 5$ e) Aucune.

10. La consommation de boeuf dans une famille est donnée par la fonction $C = 1 + \frac{1}{4}(I_p + I_m - P)$ où $I_p(Q_p, Y_p)$ est le salaire du père, $I_m(Q_m, Y_m)$ est le salaire de la mère et P est le prix du marché du boeuf.

Supposons que les salaires des parents soient calculés selon la formule: $I = 750 + 1000(\frac{1}{2}Q^2 + \sqrt{Y})$ où Q et Y représentent le niveau de qualification et le nombre d'années d'expérience respectivement.

Le taux de variation de la consommation de boeuf dans la famille par rapport à la variation de nombre d'années d'expérience de la mère est donné par:

a) $\frac{500}{\sqrt{Y_m}}$

b) $\frac{125}{\sqrt{Y_m}}$

c) $\frac{1}{4}\sqrt{Y_m}$

d) $\frac{5}{\sqrt{4}}$

Solutions

Solution du Problème 1

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^T C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 20 & 10 & -22 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution du Problème 2

x = nombre de jours passé à Londres; y = nombre de jours passé à Paris; z = nombre de jours passé à Rome.

$$\begin{cases} 180x + 230y + 160z = 2660 \\ 110x + 120y + 90z = 1520 \\ x = y + z \end{cases}$$

Avec Cramer: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Où $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{b} = (2660, 1520, 0)$ et $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 180 & 230 & 160 \\ 110 & 120 & 90 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{|B_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2660 & 230 & 160 \\ 1520 & 120 & 90 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 180 & 230 & 160 \\ 110 & 120 & 90 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{26600}{3800} = 7$$

$$y = \frac{|B_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 180 & 2660 & 160 \\ 110 & 1520 & 90 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 180 & 230 & 160 \\ 110 & 120 & 90 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{15200}{3800} = 4$$

$$z = \frac{|B_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 180 & 230 & 2660 \\ 110 & 120 & 1520 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 180 & 230 & 160 \\ 110 & 120 & 90 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{11400}{3800} = 3$$

Solution du Problème 3

Pour que les vecteurs $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}), (3\vec{v} - \vec{w})$ et $(2\vec{w})$ soient linéairment independants il faut que le système suivant ait une seule solution $c_1 = c_2 = c_3 = 0$:

$$c_1(u + \vec{v} + w) + c_2(3v \vec{-} w) + c_3(2\vec{w}) = 0$$

$$c_1\vec{u} + (c1_{+}3c_2)\vec{v} + (c1 - c_2 + c_3)\vec{w} = 0$$

Comme $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$ sont linéairment independants, alors:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous trouvons que la seule solution possible est $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \implies$ les vecteurs $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}), (3\vec{v}-\vec{w})$ et $(2\vec{w})$ sont linéairment independants.

Solution du Problème 4

a) Le bénéfice de la compagnie eput s'exprimer par la fonction

$$f(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - 4(q_1+q_2) = 14q_1 - 2q_1^2 + 6q_2 - \frac{1}{5}q_2^2$$

Il faut donc trouver le maximum de la fonction f. On a:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = 14 - 4q_1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial q_2} = 6 - \frac{2}{5}q_2.$$

Donc le gradient s'annule pour $q_1 = 3,5$ et $q_2 = 15$. A noter que toutes les sections verticales par des plans $q_1 = c$ ou $q_2 = c$ donnent des paraboles concaves, donc le point $(3,5;15)$ est bien un point de maximum.

b) Le prix pour le marché suisse sera de $18 - 2 \cdot 3,5 = 11$ frs. tandis que pour l'étranger la dose sera vendue à $10 - 15 \cdot \frac{1}{5} = 7$ frs.

c) Le bénéfice que la compagnie pourra en tirer correspond au maximum de f et donc puisque

$$\max\{f(q_1,q_2)\} = f(3,5;15) = 14 \cdot 3,5 - 2 \cdot 3,5^2 + 6 \cdot 15 - 0,2 \cdot 15^2 = 118,5$$

le bénéfice que la compagnie pourra en tirer sera de 69'500 frs.

Solution du Problème 5

a) La demande de capsules Miscafé (en milliers de capsules) est actuellement de

$$1(0,50;0,40) = 400 \cdot 0,50^{-1,5} \cdot 0,40 = 452,548.$$

b) L'élasiticité-prix de la demande de Miscafé est

$$e_{\text{prix}} = \frac{p_1}{q} \cdot (-1,5) \cdot 400 p_1^{-2,5} p_2 = -1,5$$

De manière analogue, l'élasticité-prix croisés est

$$e_{\text{prix-croisés}} = 1$$

c) La différentielle de la fonction demande est:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial q}{\partial p_2}dp_2 = 400(-1,5p_1^{-2,5}p_2dp_1 + p_1^{-1,5}dp_2) = -600p_1^{-2,5}p_2dp_1 + 400p_1^{-1,5}dp_2.$$

Donc si les deux concurrents augmentent leur prix d'un centime, la demande de Miscafé va augmenter de

$$\Delta q \simeq -600 \cdot 0,50^{-2,5} \cdot 0,40 \cdot (0,01) + 400 \cdot 0,50^{-1,5} \cdot (0,01) = -2,2627$$

c'est-à-dire la demande quotidienne de capsules Miscafé diminuera de 2263 capsules. Chaque centime d'augmentation simultanée des prix des deux concurrents impliquera une diminution quotidienne de 2263 capsules supplémentaires.

d) Si Monarabica garde le prix de la capsule à 0,40 Fr., alors la fonction chiffre d'affaires pour Miscafé s'exprime

$$R(p) = p \cdot 400p^{-1,5} \cdot 0,40 = \frac{160}{\sqrt{p}}.$$

La fonction R est clairement une fonction décroissante, donc si Miscafé veut augmenter son chiffre d'affaire, ils devront diminuer le prix de la capsule.

Solution du Problème 6

1. C,D
2. C,E
3. C

4. A
5. B
6. B
7. A,C
8. C,D
9. D
10. B