UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES II
SESSION D'EXAMENS: AOÛT - SEPTEMBRE 2017
DATE: 30.08.2017
DURÉE: 2 HEURES
TOTAL: 50 POINTS

PROFESSEUR: GIUSEPPE MELFI

NOM ET PRÉNOM: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille manuscrite format A4. Aucune autre documentation ni dispositif électronique ne sont autorisés.
Calculatrice : Autorisée
Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.

Problème 1 (10 pts)

Étant donné les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Vérifiez que $(BD)^T = D^T B^T$.

b) Vérifiez que C est idempotente.

c) Lorsque c'est possible, calculez $A - 3D$, A^{-2} et E^{-1}.

Problème 2 (10 pts)

Swissphone propose un plan tarifaire à ses clients qui comprends des sms illimités dans l'abonnement mensuel de base, mais des appels facturés à la minute et du trafic internet facturé selon le nombre de Gigaoctets consommés. Pour une consommation mensuelle de 50 minutes d'appels téléphoniques et 4 Gigaoctets de données de trafic internet, la compagnie facture à Alice 46 Frs. Pour une consommation mensuelle de 100 minutes et 6 Gigaoctets de données, la compagnie facture à Bertrand 62 Frs. Pour une consommation mensuelle de 25 minutes d'appels et 10 Gigaoctets, la compagnie facture 73 Frs. à Cosette.

a) Formulez un système d'équations linéaires pour déterminer le montant de l'abonnement mensuel de base, le tarif des appels, et le tarif pour le trafic internet par Gigaoctet consommé. Indiquez clairement ce que chaque variable dans votre système représente.

b) Trouvez la solution du système ainsi trouvé.

c) Le dernier mois Denis a effectué 75 minutes d'appels et consommé 3 Gigaoctets de trafic internet. Combien la compagnie lui facture?

Problème 3 (10 pts)

1. Écrivez la fonction quadratique suivante en forme matricielle:

$$f(x, y, z) = 5\ x^2 + 8\ y^2 + 2z^2 + 6\ xy - 6\ xz + 8\ yz$$

2. Trouvez une représentation paramétrique du plan suivant:

$$3x + 4y + 2z = 0$$

3. Pour chacune des familles de vecteurs ci-dessous, quelles sont les valeurs du paramètre h pour lesquelles les vecteurs sont linéairement indépendants ?

   a) $\{(1, h, 0), (0, 1, -h), (1, 2h, 4h + 3)\}$ dans $\mathbb{R}^3$
   b) $\{(1, -3, 2, h - 2), (-3, 9, -6, 6 - 3h), (5, -7, h, h + 1)\}$ dans $\mathbb{R}^4$

Problème 4 (10 pts)

On considère la fonction

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 2xz + 4.$$

a) Déterminer les extrema de la fonction f.

b) Pour $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ calculer le gradient $\nabla f(\mathbf{v})$

c) Calculer la hessienne $D^2 f(x, y, z)$ et prouver que pour tout x, y, z la hessienne est définie positive.

d) Que vaut le minimum de la fonction f?

Problème 5 (10 pts)

Dans un monde à deux produits, on considère les fonctions de demande d'élasticité constante suivantes:

$$Q_1 = 4p_1 p_2^{-1} y^2 \qquad Q_2 = 6p_1^{-2} p_2^{3/2} y$$

Ici, Q_1 et Q_2 représentent la demande du produit 1 et du produit 2 respectivement; p_1 et p_2 représentent les prix respectifs des deux produits; y représente le revenu. Ci-après $Q = (Q_1, Q_2)$.

Si les prix et le revenu actuels sont $p_1 = 6$, $p_2 = 9$ et $y = 2$:

a) Quelle est le vecteur de la demande actuelle Q?

b) En utilisant l'analyse marginale, estimez la variation de la fonction de demande Q lorsque p_1 augmente de 0.5 et p_2 diminue de 0.2.

c) Si le revenu et les prix eux-mêmes sont des fonctions du temps t et du taux d'intérêt r selons les relations suivantes :

$$p_1(t) = \sqrt{12t}$$

$$p_2(t, r) = 10rt^2$$

$$y(r) = 20r$$

Trouvez les taux de variation des quantitées demandées Q_1 et Q_2 par rapport au temps et au taux d'intérêt lorsque $t = 3$ et $r = 0.1$

Solutions

Solution du Problème 1

a)

$$(BD)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -19 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$D^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -19 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

b)

$$C = C^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

c)

$$A^-2 = (A^-1)^2 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \right)^2 = \left(\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 & -1 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & -3/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution du Problème 2

a) Si on note x_1 le coût de l'abonnement mensuel, x_2 le tarif des appels par minutes et x_3 le coût d'un Gigaoctet de trafic internet, les informations données se traduisent dans le système suivant:

$$\begin{cases} x_1 + 50x_2 + 4x_3 = 46 \\ x_1 + 100x_2 + 6x_3 = 62 \\ x_1 + 25x_2 + 10x_3 = 73 \end{cases}$$

b) Des deux premières équation on déduit que

$$50x_2 + 2x_3 = 16$$

De la première, si l'on soustrait la troisième on obtient

$$25x_2 - 6x_3 = -27$$

Si on combine les deux dernières équation on obtient un système de deux équations en deux inconnues :

$$\begin{cases} 25x_1 - 6x_2 = -27 \\ 25x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Par soustraction on obtient $7x_3 = 35$ et donc $x_3 = 5$. Par conséquent $x_2 = 3/25 = 0,12$ et $x_1 = 46 - 4 \cdot 5 - 50 \cdot 12 = 20$.

c) Le modèle tarifaire de Swissphone est donc

$$z = 20 + 0,12x + 5y$$

où x est le nombre de minutes et y le nombre de gigaoctets consommés. En particulier pour 75 minutes d'appels et 3 Gigaoctets consommés, la compagnie va factuer à Denis

$$z = 20 + 75 \cdot 0,12 + 5 \cdot 3 = 44 \quad \text{Frs.}$$

Solution du Problème 3

1.
$$f(x,y,z) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Pour représenter un plan en utilisant la forme $x(t) = \mathbf{p_0} + t\mathbf{v} + s\mathbf{u}$, il suffit d'identifier trois points (p_0, p_1 et p_2) sur le plan et d'utiliser le premier point p_0, comme le point de départ et la différence $p_1 - p_0$ et $p_2 - p_0$ comme les deux vecteurs de direction v et u. En utilisant $p_0 = (0,0,0)$, $p_1 = (-2,2,-1)$ et $p_2 = (2,-2,1)$:

$$x(s,t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

3. a) Il faut que $det\Big((1,h,0),(0,1,-h),(1,2h,4h+3)\Big) \neq 0 \implies$

$$h^2 + 4h + 3 \neq 0 \implies h \in \mathbb{R}/\{-1,-3\}$$

b) le $det\Big((1,-3,2,h-2),(-3,9,-6,6-3h),(5,-7,h,h+1)\Big) = 0$ pour n'importe quelle valeur de $h \in \mathbb{R}$ (Le deuxième vecteur est un multiple scalaire du premier) $\implies$ aucune valeur de h permit d'avoir un independance linéaire entre ces vecteurs.

Solution du Problème 4

a) Nous avons:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 4y + 2z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10y + 4x + 4z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 4y + 2x$$

Le système $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ a comme seule solution $x = y = z = 0$, car la matrice des coéfficients est une matrice carrée non singulière, et il s'agit d'un système d'équations sans constantes.

b) Pour $\mathbf{v} = (1,2,1)$ nous avons $\nabla f(\mathbf{v}) = (14, 28, 14)$.

c) La matrice hessienne est:

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

C'est une matrice symétrique carrée et elle est définie positive, car $|A_1| = 4$; $|A_2| = 24$; et $|A_3| = 160 + 32 + 32 - 40 - 64 - 64 = 56$.

d) Étant donné que $D^2 f$ est définie positive, l'extremum trouvé en a) est un minimum. Nous avons que

$$\min\{f(x,y,z)|(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = f(0,0,0) = 4.$$

Solution du Problème 5

1.
$$Q(6,9,2) = \begin{pmatrix} 4(6)(9)^{-1}(2)^2 \\ 6(6)^{-2}(9)^{3/2}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2. En utilisant la formule de l'approximation linéaire:

$$\Delta Q = Q(p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, y + \Delta y) - Q(p_1, p_2, y) = \nabla Q.(\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta y)$$

$$\Delta Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{\delta Q_1}{\delta p_1} \\ \frac{\delta Q_1}{\delta p_2} \\ \frac{\delta Q_1}{\delta y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{p_2}^{-1}y^2 \\ -4p_1{p_2}^{-2}y^2 \\ 8p_1{p_2}^{-1}y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = (\frac{16}{9}) \times (0.5) + (-\frac{32}{27}) \times (-0.2) = 1.125$$

$$\Delta Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{\delta Q_2}{\delta p_1} \\ \frac{\delta Q_2}{\delta p_2} \\ \frac{\delta Q_2}{\delta y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12{p_1}^{-3}{p_2}^{3/2}y \\ 9{p_1}^{-2}{p_2}^{1/2}y \\ 6{p_1}^{-2}{p_2}^{3/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3) \times (0.5) + (1.5) \times (-0.2) = -1.8$$

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.125 \\ -1.8 \end{pmatrix}$$

3. Ici, nous pouvons reécrire les fonctions $Q1, Q2$ comme:

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : Q(p_1, p_2, y) = (6p_1^{-2}p_2^{3/2}y \ , \ 4p_1p_2^{-1}y^2)$$

De la même manière, on écrit p_1, p_2 et y en fonction de t et r:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : F(t, r) = (p_1, p_2, y) = (\sqrt{12t} \ , \ 10rt^2 \ , \ 20r)$$

Maintenant, le problem de trouver le taux de variation devient le problème de trouver la matrice jacobienne de la fonction composée $Q \circ F$ au point $x = (t, r) = (3, 0.1)$ en utilisant la règle de chaîne:

$$D(Q \circ F)_x = D\ (Q_{F(x)}) \cdot D\ (F_x)$$

$$D(Q \circ F)_x = \begin{bmatrix} \frac{\delta Q_1}{\delta p_1} & \frac{\delta Q_1}{\delta p_2} & \frac{\delta Q_1}{\delta y} \\ \frac{\delta Q_2}{\delta p_1} & \frac{\delta Q_2}{\delta p_2} & \frac{\delta Q_2}{\delta y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\delta p_1}{\delta t} & \frac{\delta p_1}{\delta r} \\ \frac{\delta p_2}{\delta t} & \frac{\delta p_2}{\delta r} \\ \frac{\delta y}{\delta t} & \frac{\delta y}{\delta r} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -12{p_1}^{-3}{p_2}^{3/2}y & 9{p_1}^{-2}{p_2}^{1/2}y & 6{p_1}^{-2}{p_2}^{3/2} \\ 4{p_2}^{-1}y^2 & -4p_1{p_2}^{-2}y^2 & 8p_1{p_2}^{-1}y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}\ t^{-1/2} & 0 \\ 20rt & 10t^2 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Au point x,$F(t, r) = F(3, 0.1) = (p_1, p_2, y) = (6, 9, 2)$, alors:

$$D(Q \circ F)_x = \begin{bmatrix} -3 & 1.5 & 4.5 \\ 16/9 & -32/27 & 32/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 90 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$