

LDDR-Niveau I: Probabilités - Solutions

Exercice 8.37

a. A mais pas B

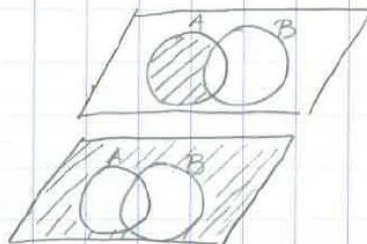
$$A \cap \bar{B}$$

b. Ni A ni B

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

c. Soit A soit B mais pas les deux

$$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \\ = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$$



Exercice 8.38

a. $\{(p;1), (p;2), (p;3), (p;4), (p;5), (p;6), (f;1), (f;2), (f;3), (f;4), (f;5), (f;6)\}$ p: pile, f: face

b. $A = \{(f;2), (f;4), (f;6)\}$

$B = \{(p;2), (p;3), (p;5), (f;2), (f;3), (f;5)\}$

$C = \{(p;1), (p;3), (p;5)\}$

c. a) $A \cup B = \{(f;2), (f;4), (f;6), (p;2), (p;3), (p;5), (f;3), (f;5)\}$

b) $A \cap B = \{(f;2)\}$ = A et B

c) $B \cap \bar{A} \cap \bar{C} = \{(p;2), (f;3), (f;5)\}$

d. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ ils ne sont pas incompatibles

$A \cap C = \emptyset \Rightarrow$ ils sont incompatibles

$B \cap C = \{(p;3), (p;5)\} \neq \emptyset \Rightarrow$ ils ne sont pas incompatibles

Exercice 8.39

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(\bar{A}) = \frac{1}{3}; P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$$

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$* \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

b. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

c. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

d. $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \\ = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{3}{4}$

EXERCICE 8.40 a. Cas possibles: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N(\Omega) = 6$
 Cas favorables: $\{2, 4, 6\}$ $N(A) = 3$
 Probabilité = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(A)$

b. B: au moins un face apparaît lors du lancer de 3 pièces
 $\bar{B}$: l'événement d'obtenir aucune fois face.
 = obtenir 3 piles
 $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

c. 4 B, 3 R, 5 J.
 C: l'événement de tirer une bille rouge
 Cas possibles: $N(\Omega) = 4 + 3 + 5 = 12$
 cas favorables: $N(C) = 3$ (3 billes rouges)
 $P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{3}{12} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}$

EXERCICE 8.41 10 élèves; 3 gauchers On choisit 2 élèves
 a. A: l'événement de choisir 2 gauchers
 Cas possibles: $C_2^{10} = 45$ (2 élèves parmi les 10) = $N(\Omega)$
 cas favorables: $C_2^3 = 3$ (2 gauchers parmi les 3) = $N(A)$
 $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$

b. B: aucun des deux ne soit gaucher
 Cas possibles: $C_2^{10} = 45 = N(\Omega)$
 Cas favorables: $C_2^7 = 21$ } $P(B) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

c. C: Au moins l'un d'eux soit gaucher
 $\bar{C}$ = Aucun des 2 ne soit gaucher = B.
 Donc $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

d. D: exactement l'un d'eux soit droitier
 Cas possibles: $C_2^{10} = 45$
 Cas favorables: $C_1^7 \cdot C_1^3 = 7 \cdot 3 = 21$
 $\downarrow$ parmi 7 droitiers $\downarrow$ parmi 3 gauchers
 $P(D) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

EXERCICE 8.42

N \ R	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$n(\Omega) = 36$$

tous les cas possibles

a. A: 3 R et 5 N. $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

b. B: un 3 et un 5. $P(B) = P((3,5) \cup (5,3)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

c. C: le même résultat sur les deux dé's (diagonale)

$$P(C) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

d. D: Somme égale à 8. $D = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$
 $n(D) = 5 \Rightarrow P(D) = \frac{5}{36}$

e. E: Somme paire

$$E = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\} \cup(E) = 18$$

Alors $P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

f. F: aucun 6. $n(F) = 25$
 $\Rightarrow P(F) = \frac{25}{36}$

g. G = au moins 1 6 si $x = \bar{F} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(G) = 1 - P(F) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

EXERCICE 8.43

468 filles, $\leadsto$ 65% de tous les étudiants.

240 étudiants $\rightarrow$ chorale. $f = 5\%$

total $\cdot 0.65 = 468 \Rightarrow$ Etudiants au total $= \frac{468}{0.65} = 720$
 et $720 - 468 = 252$ garçons.

Chorale: Soit x le nb de garçons $\rightarrow$ filles $= 5x$
 Alors $x + 5x = 240 \Leftrightarrow 6x = 240 \Leftrightarrow x = 40$

Ainsi il y a 40 garçons et 200 filles dans la chorale

$$a. P(F \cap C) = \frac{200}{720} = \frac{5}{18}$$

$$b. P(F \cap \bar{C}) = \frac{468 - 200}{720} = \frac{268}{720} = \frac{67}{180}$$

$$c. P(G \cap \bar{C}) = \frac{252 - 40}{720} = \frac{212}{720} = \frac{53}{180}$$

$$d. P(G \cap C) = \frac{40}{720} = \frac{1}{18}$$

F: l'étudiant est fille

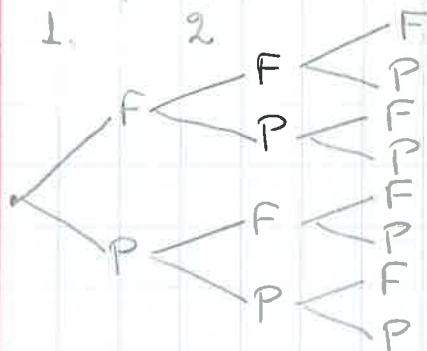
G: ... est garçon.

C: ... chante

EXERCICE 8.44

On a une probabilité conditionnelle:

E: l'événement d'obtenir 3 faces $P(F) = \frac{1}{8}$



a. A: obtenir face en 1: $P(A) = \frac{1}{2}$
 $A \cap F = F = 3 \text{ faces}$

$$\text{Donc } P(F|A) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

b. B: obtenir pile en 2: $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$B \cap F = 3 \text{ faces et } 2^{\text{ème}} \text{ pile impos}$

Donc $P(B \cap F) = 0 \Rightarrow P(F|B) = 0$

- c. C: au moins 1 face = 1 face ou 2 faces ou 3 faces
 $\bar{C}$: aucun face $\rightarrow$ 3 piles: $P(\bar{C}) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
 $C \cap F = 3 \text{ faces} \rightarrow P(C \cap F) = \frac{1}{8}$
 Alors $P(F|C) = \frac{P(C \cap F)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$.

EXERCICE 8.45

M: un étudiant échoue en Maths $P(M) = 0.25$
 C: un étudiant échoue en Chimie $P(C) = 0.15$
 MNC: un étudiant échoue en Maths et en Chimie
 $P(M \cap C) = 0.10$

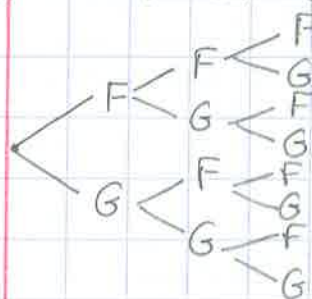
- a. $P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0.10}{0.15} = 0.\bar{6} = \frac{2}{3}$
 b. $P(C|M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$
 c. $P(\bar{C} \cap \bar{M}) = P(\overline{C \cup M}) = 1 - P(C \cup M) =$
 $= 1 - P(C) - P(M) + P(C \cap M) = 1 - 0.15 - 0.25 + 0.1 =$
 $= 0.7$

EXERCICE 8.46

A: les enfants sont de même sexe.

B: au plus 1 garçon = 0 garçon ou 1 garçon

- a. $N(\omega) = 3$ (enfants)



le même sexe FFF ou GGG

$$P(A) = P(FFF) + P(GGG) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(FFF) + P(FFG) + P(FGF) + P(GFF) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(FFF) = \frac{1}{8}$$

On a $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(A \cap B)$ donc A et B sont indépendants.

b.

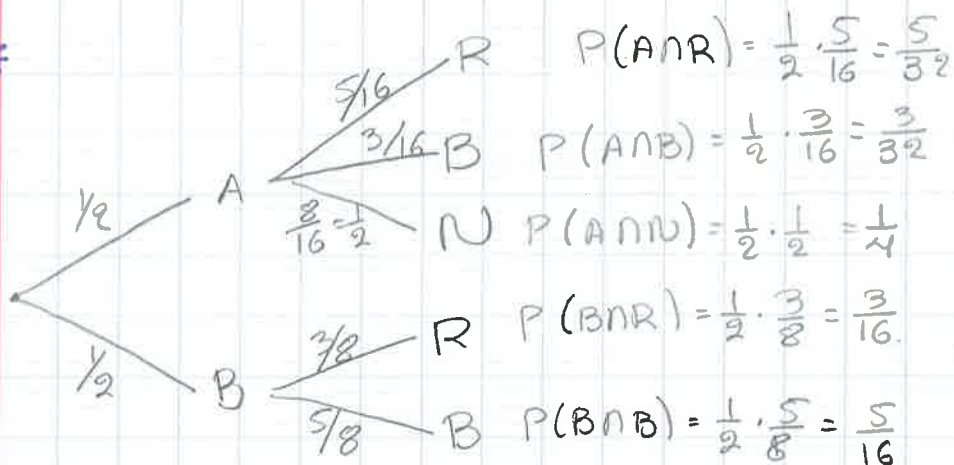


$$P(A) = P(FFF) + P(GGG) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(FFF) + P(FG) + P(GF) = \frac{3}{4}$$

$P(A \cap B) = P(FFF) = \frac{1}{4}$
 $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4}$ Donc ils ne sont pas indépendants.

Exercice 8.47



a. i) $P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = \frac{5}{32} + \frac{3}{16} = \frac{11}{32}$

ii) $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap B) = \frac{3}{32} + \frac{5}{16} = \frac{13}{32}$

iii) $P(N) = P(A \cap N) = \frac{1}{4}$

b. i) $P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{5/32}{11/32} = \frac{5}{11}$

ii) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/32}{13/32} = \frac{3}{13}$

iii) $P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$

Exercice 8.48

1 As pique 1 As carreau 2 cartes

$N(\Omega) = \binom{4}{2} = 6$ cas possibles

a. $N(A) = 1 \cdot \binom{3}{1} = 3$ cas favorables.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b. $N(B) = 1$ cas favorables $P(B) = \frac{1}{6}$

c. c'est probabilité conditionnelle

B: A a les deux as, A = A a l'as pique.

On a $A \cap B$: A a les 2 as.

De plus $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{6}$

Ainsi $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d. Probabilité conditionnelle.

D: au moins 1 de 2 as. = 1 as ou 2 as.

$\bar{D}$: aucun as. $P(\bar{D}) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(D) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

On cherche $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
car $D \subseteq A \Rightarrow A \cap D = A$

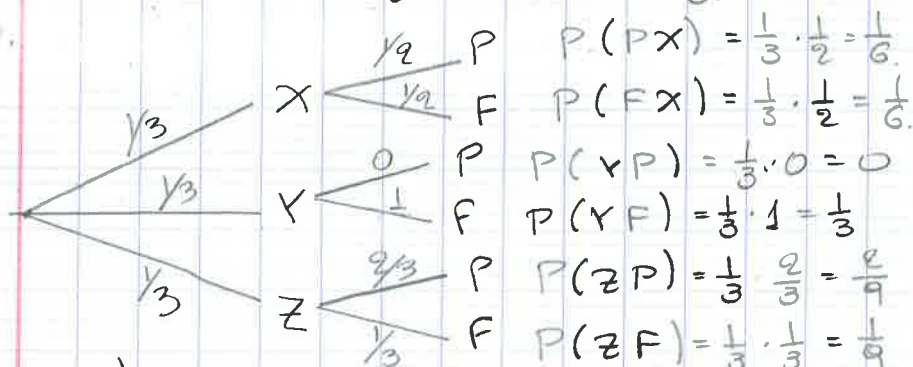
EXERCICE 8.49

X: $P(F \cap X) = P(P \cap X) = \frac{1}{2}$

$P(X) = P(Y) = P(Z) = \frac{1}{3}$

Y: $P(F \cap Y) = 1$, $P(P \cap Y) = 0$

Z: $P(F \cap Z) = \frac{1}{3}$, $P(P \cap Z) = \frac{2}{3}$



a. $P(F) = P(F \cap X) + P(F \cap Y) + P(F \cap Z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$

b. $P(X|F) = \frac{P(X \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{18}} = \frac{18}{6 \cdot 11} = \frac{3}{11}$

c. $P(Z|P) = \frac{P(P \cap Z)}{P(P)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{2 \cdot 18}{7 \cdot 9} = \frac{4}{7}$

$P(P) = P(P \cap X) + P(P \cap Y) + P(P \cap Z) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$

EXERCICE 8.50 $N(\emptyset) = \binom{36}{3} = 7140$.

a. A: 3 valets $N(A) = \binom{4}{3} = 4$ car il y a 4 valets
 $P(A) = \frac{N(A)}{N(\emptyset)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{36}{3}} = \frac{4}{7140} = \frac{1}{1785}$

b. B: 2 valets et un roi: $N(B) = \binom{4}{2} \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$
 $P(B) = \frac{24}{7140} = \frac{2}{595}$

c. C: 3 figures (En total $4 \cdot 4 = 16$ fig.)
 $N(C) = \binom{16}{3} = 560$ $P(C) = \frac{560}{7140} = \frac{4}{51}$

d. D: 3 figures différentes: $N(D) = \binom{16}{1} \binom{12}{1} \binom{8}{1} = 256$
 $P(D) = \frac{256}{7140} = \frac{64}{1785}$

e. E: Au plus une figure. = 0 fig ou 1 fig
 $P(1 \text{ Fig}) = \binom{16}{1} \binom{20}{2} = 16 \cdot 190 = 3040$
 $N(0 \text{ Fig}) = \binom{20}{3} = 1140$
 $N(E) = 3040 + 1140 = 4180$
 $P(E) = \frac{4180}{7140} = \frac{209}{357}$

f. F: Au moins une figure
 $\bar{F}$: Aucune figure. $N(\bar{F}) = \binom{20}{3} = 1140$
 $P(\bar{F}) = \frac{1140}{7140} \Rightarrow P(F) = 1 - \frac{1140}{7140} = \frac{6000}{7140} = \frac{1000}{1190} = \frac{100}{119}$

EXERCICE 8.5 $N(D) = \binom{90}{5} \binom{9}{2} =$

a. Les deux tickets ont la même probabilité.

b. B: l'étoile 5 sortira: $N(B) = \binom{8}{1} = 8$
 $P(B) = \frac{8}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

c. La probabilité ne change pas car les événements sont indépendants.

d. Il y a $\binom{50}{5} = 2118760$ possibilités

e. Il y a $\binom{9}{2} = 36$ possibilités

f. $N(F) = 1 \Rightarrow P(F) = \frac{1}{\binom{50}{5} \binom{9}{2}} = \frac{1}{2118760 \cdot 36}$

g. On a 7 étoiles qui ne gagnent pas et 2 qui gagnent

$N(G) = \binom{7}{1} \binom{2}{1} = 7 \cdot 2 = 14$

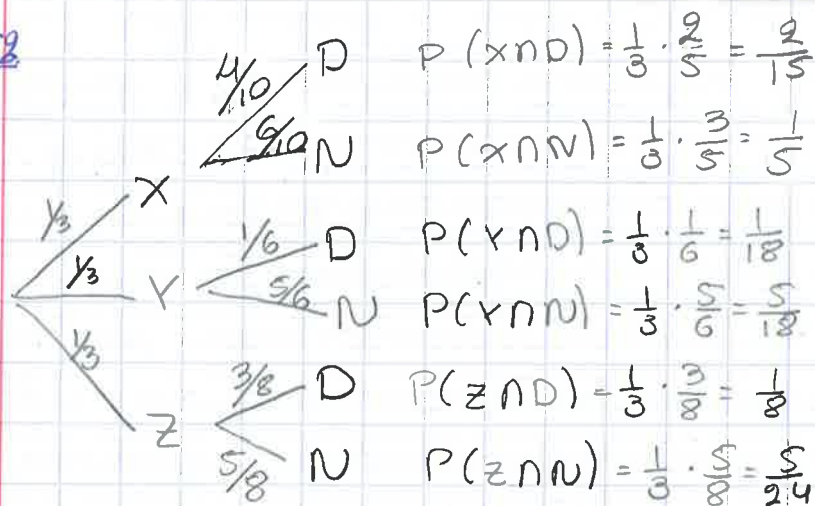
Donc $N(G) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

- h. Il y a 45 nombres pas gagnants et 5 qui gagnent.
Au moins 3 nombres = 3 nombres ou 4 ou 5.

$$N(H) = \binom{45}{2} \binom{5}{3} + \binom{45}{1} \binom{5}{4} + \binom{45}{0} \binom{5}{5} = 9900 + 225 + 1 = 10126$$

$$\text{et } P(H) = \frac{10126}{2118760} = 0.00478$$

EXERCICE 8.52



- a. N l'ampoule est non défectueuse.

$$P(N) = P(X \cap N) + P(Y \cap N) + P(Z \cap N) = \frac{1}{5} + \frac{5}{18} + \frac{5}{24} = \frac{247}{360}$$

b. $P(Z|N) = \frac{P(Z \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{247}{360}} = \frac{75}{247}$

EXERCICE 8.53

On a la distribution binomiale

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

X: l'atteinte de la cible.

k: le nombre d'atteinte

n: le nombre de tire et

p: la probabilité d'atteindre la cible.

Dans ce cas: $p = \frac{1}{4}$, $n = 6$

a. $P(X=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-2} = 15 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{81}{256} = 0.2966 = 29.66\%$

$$b. P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6) =$$

$$= \binom{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{1024} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4096} \cdot 1 = 0.0046 = 0,46\%$$

$$c. P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.892 = 89,2\%$$

EXERCICE 8.54

loi binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

X : les garçons dans la famille de 6 enfants

k : représente le nombre de garçons

n : le nombre d'enfants

p : la probabilité d'avoir un garçon.

Dans ce cas: $p=0.6$, $n=6$

$$a. P(X=3) = \binom{6}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^{6-3} = 0.27648 = 27,648\%$$

b. Moins de garçons que de filles signifie $X \leq 2$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{6}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^6 + \binom{6}{1} 0.6^1 \cdot 0.4^{6-1} + \binom{6}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^{6-2} =$$

$$= 0.1792 = 17,92\%$$

EXERCICE 8.55

loi binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

X : comptabilise le nombre de touches

k : représente le nombre de touches

n : le nombre de lancers,

p : la probabilité de toucher.

Ici: $p=0.3$

On cherche n pour que $P(X \geq 1) > 90\% = 0.9$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) > 0.9 \Leftrightarrow P(X=0) < 0.1$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{n-0} < 0.1 \Leftrightarrow 0.7^n < 0.1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(0.7^n) < \log 0.1 \Rightarrow n \log 0.7 < \log 0.1$$

$$\Leftrightarrow n \cdot (-0.1549) < -1 \Leftrightarrow n > 6.45$$

Alors $n \geq 7$

EXERCISE 8.56

EXERCICE 8.56 Loi binomiale. $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

X: comptabilise les cas que l'on veut obtenir.

n_i représente le nombre de lancers,

k : le nombre de fois ce que l'on veut obtenir et

p : la probabilité de ce qu'on veut obtenir.

a. Que des G: $n=5$, $p=\frac{1}{6}$

$$i) P(X=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{7776} \cdot 1 = 0.0129\%$$

$$ii) P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} = 40.19\%$$

$$\text{iii) } P(X=3) = \frac{\binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}}{\binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-4} + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-5}} = \frac{7776}{3.215\%}$$

$$iv) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{3125}{7776} = 59.81\%$$

b. On cherche n pour qu'on ait: $P(X \geq 1) > 0.995$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0.995 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0.005$$

$$\Rightarrow \binom{7}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.005 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.005 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{5}{6} < \log 0.005 \Leftrightarrow n (-0.079) < -2.3 \Leftrightarrow$$

$$n > 29.13$$

Alors on devra lancer le dé au moins 30 fois pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 soit supérieure à 99.5%

EXERCICE 8.57

EXERCICE 8.5F Loi binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

P_2 : la probabilité d'obtenir une bille rouge = $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

P_B : -/- -/- -/- branche "0"

✓ branche = 0

a. $j \leq 4$ billes de la même couleur = 4 blanches ou 4 rouges.

X comptabilise les billes blanches

$$P = P(X=4) + P(X=0) = \binom{4}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^0 + \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.1552.$$

i) Une seule bille rouge:
 X : les billes rouges.

$$k=1 \quad p=\frac{2}{5} \quad n=4.$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0.3456.$$

ii) Exactement 2 billes rouges.

X : les billes rouges, $k=2$, $p=\frac{2}{5}$, $n=4$.

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0.3456.$$

iii) Au moins une bille blanche

X : les billes blanches: $k \geq 1$, $p=\frac{3}{5}$, $n=4$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{16}{625} = 0.9744$$

b. On cherche n avec $p=\frac{2}{5}$ (prob rouge)

$$P(X \geq 1) > 99.7\% \Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0.997 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) < 0.003 \Leftrightarrow \binom{n}{0} \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0.003 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{3}{5} < \log 0.003$$

$$\Leftrightarrow n(-0.222) < -2.52 \Leftrightarrow n > 11.36$$

Alors on doit tirer au moins 12 billes.

EXERCICE 8.58 loi binomiale. $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

n : représente le nombre de tirages

a. $k=1$, $n=4$, $p=0.1$.

$$P(X=1) = \binom{4}{1} 0.1^1 0.9^3 = 29.16\%$$

b. $n=5$ $p=0.1$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} 0.1^0 0.9^5 = 1 - 0.9^5 =$$
$$= 1 - 0.59049 = 40.951\%$$

c. $n=2$, $k=1$ $p=0.1$: $P(X=1) = \binom{2}{1} 0.1^1 0.9^1 = 18\%$

$$P(H) = 0.9 \quad P(R) = 0.1$$

$P(S|H) = 0.05$ la probabilité pour qu'un honnête voyage sans billet

$\Rightarrow P(A|H) = 0.95$ la probabilité pour qu'un honnête voyage avec billet

$$P(S|R) = 1 \text{ et } P(A|R) = 0$$

d. * On cherche la probabilité $P(H \cap S)$

$$P(H \cap S) = P(S|H) \cdot P(H) = 0.05 \cdot 0.9 = 0.045$$

$$e. P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap R) = P(A|H) \cdot P(H) + 0 = 0.95 \cdot 0.9 = 0.855$$

f. probabilité d'en trouver un sans billet = $n-1$ avec billet et le dernier sans billet.

Alors prob cherchée = $1 - \text{prob tous avec billet} =$

$$= 1 - 0.855^n. \text{ On doit avoir } 1 - 0.855^n \geq 0.99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.855^n \leq 0.01 \Leftrightarrow n \log 0.855 \leq \log 0.01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(-0.068) \leq -2 \Leftrightarrow n \geq 29.41$$

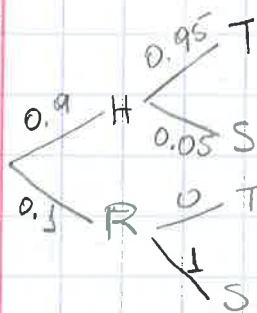
Alors on doit contrôler au moins 30 usagers

g. On cherche la probabilité conditionnelle

$$P(R|S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|R) \cdot P(R)}{P(S)}$$

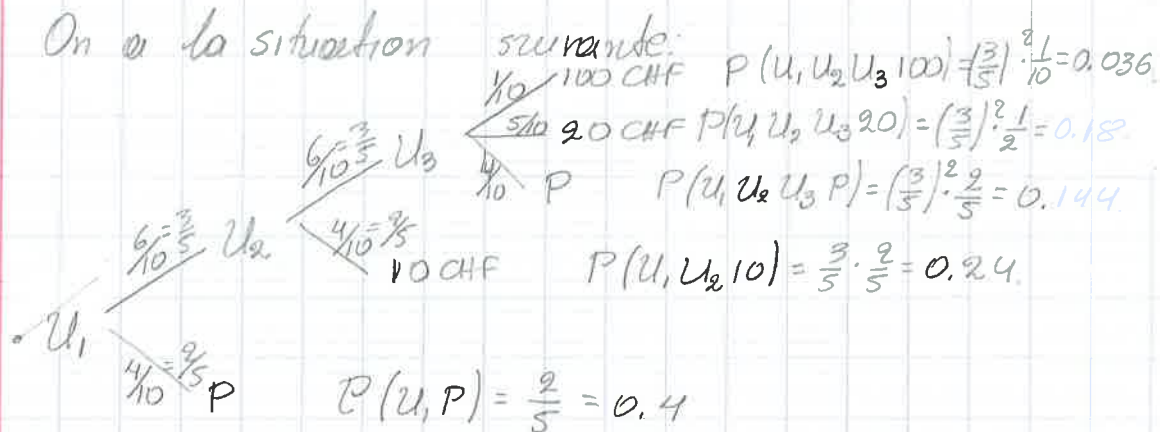
$$P(S) = 1 - P(A) = 1 - 0.855 \Rightarrow P(S) = 0.145$$

$$\text{Donc } P(R|S) = \frac{1 \cdot 0.1}{0.145} = 0.6897 = 68.97\%$$



EXERCICE 8.59.

On a la situation



a. $P(10) = P(U, U_2, 10) = 0.24$

$P(20) = P(U, U_2, U_3, 20) = 0.18$

$P(100) = P(U, U_2, U_3, 100) = 0.036$

b. $P(P) = P(U, U_2, U_3, P) + P(U, P) = 0.144 + 0.4 = 0.544$

$P(U, U_2, U_3, P/P) = \frac{P(U, U_2, U_3, P \cap P)}{P(P)} = \frac{0.144}{0.544} = 0.265$

c. On a la situation suivante:

1	2
0	20
20	0
20	20
0	100
100	0
100	100
100	10
10	100
100	20
20	100
20	10
10	20

$P(C) = 0.544 \cdot 0.18 \cdot 2 + 0.18^2 + 0.544 \cdot 0.036 \cdot 2$
 $+ 0.036^2 + 0.036 \cdot 0.24 \cdot 2 + 0.036 \cdot 0.18 \cdot 2$
 $+ 0.18 \cdot 0.24 \cdot 2 = 0.443$

d. loi Binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
 $n=30$

► $p = P(100) = 0.036$. X : nb de 100.

$k=0$

$$P(X=0) = \binom{30}{0} 0.036^0 \cdot 0.964^{30} = 0.333.$$

► $p = 0.036$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.333 = 0.667$$

► $p = 0.036$. $k=2$.

$$P(X=2) = \binom{30}{2} 0.036^2 \cdot 0.964^{28} = 0.202$$

e. $n=?$ $P(X \geq 1) \geq 0.9 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0.9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0.1 \geq P(X=0) \Leftrightarrow 0.1 \geq \binom{n}{0} 0.036^0 \cdot 0.964^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.1 \geq 0.964^n \Leftrightarrow \ln 0.1 \geq n \ln 0.964 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2.3 \geq n \cdot (-0.037) \Leftrightarrow 62.7 \leq n \Rightarrow \underline{n \geq 63}$$

EXERCICE 8.60

a. $p = P(c) = \frac{1}{3}$ X : nb des réponses correctes

$n=10$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 1 - 0.0173 = 0.9827.$$

b. $p = \frac{1}{3}$ $k=3$, $n=10$.

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0.26$$

c. $n=?$ $P(X \geq 1) = \frac{665}{729} \Leftrightarrow 1 - P(X=0) = \frac{665}{729} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{729} = P(X=0) \Leftrightarrow \frac{64}{729} = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \underline{n=6}$$

$$p(c) = P(c \cap H) + P(c \cap \bar{H}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{14}{15} = 0.9333$$

d. $n=1$ $k=1$

$$P(c) = \binom{1}{1} 0.9333^1 (1 - 0.9333)^0 = 0.9333$$

* la probabilité de répondre juste à n'importe quelle question est ainsi $\frac{14}{15} = 0.9333$.

e. $n=2$ $k=1$ $p=0.9333$

$$P(X=1) = \binom{2}{1} 0.9333^1 0.0667^1 = 0.1245$$

f. On cherche la probabilité conditionnelle:

$$P(\bar{H} | c) = \frac{P(\bar{H} \cap c)}{P(c)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{14}{15}} = 0.9643$$

$$P(\bar{H} \cap c) = \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{9}{10}$$

$$P(c) = \frac{14}{15}$$

g. $P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) =$
 $= \binom{10}{9} 0.9333^9 0.0667^1 + \binom{10}{10} 0.9333^{10} 0.0667^0 =$
 $= 0.8599$

h. A = Albert a répondu juste

B = Bernard a répondu juste

C = $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ = 1 seul a répondu juste.

$$P(B|c) = \frac{P(B \cap c)}{P(c)} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(c)} = \frac{0.622}{0.644} = 0.9652$$

$B \cap c$ = Bernard juste et Albert faux =
 $= B \cap \bar{A}$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{3} = 0.622$$

$$P(c) = P(B \cap \bar{A}) + P(\bar{B} \cap A) = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = 0.644$$

EXERCICE 8.61

$P(G) = p = 0.6$ X = les nombres de tournesols qui germent

a. $n=5$ $k=1$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} 0.6^1 0.4^4 = 0.0768$$

b. $n=4$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{4}{0} 0.6^0 0.4^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$

c. On cherche la probabilité qu'au moins un tournesol germe dans un bac.

$n=2$ $p=0.6$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{2}{0} 0.6^0 0.4^2 = 0.84$

Après on a: $n=5$ $p=0.84$ et on cherche

$$P(X=5) = \binom{5}{5} 0.84^5 0.16^0 = 0.84^5 = 0.4182$$

d. $n=?$ $p=0.6$

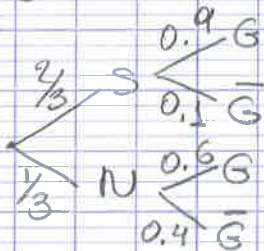
$$P(X \geq 1) \geq 0.999 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0.999 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.001 \geq P(X=0) \Leftrightarrow 0.001 \geq \binom{n}{0} 0.6^0 0.4^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 0.001 \geq n \ln 0.4 \Leftrightarrow -6.91 \geq n (-0.92) \Leftrightarrow$$

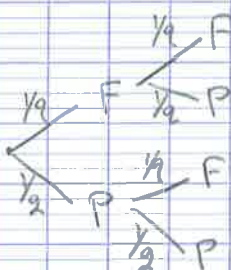
$$\Leftrightarrow n \geq 7.5 \Rightarrow \underline{n=8}$$

e. $\frac{2}{3}$ super $\frac{1}{3}$ normales



$$P(G) = \frac{2}{3} \cdot 0.9 + \frac{1}{3} \cdot 0.6 = 0.8$$

f. $P(S/G) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0.9 \cdot \frac{2}{3}}{0.8} = 0.75$



i	0 faces	1	2
$P(X=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
X	-3	1	2

$$E(X) = -3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 8.63

a.

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

i	+10	-1
P(X=i)	$\frac{4}{52}$	$\frac{48}{52}$

$$E(X) = 10 \cdot \frac{4}{52} - 1 \cdot \frac{48}{52} = -\frac{8}{13} = -\frac{2}{13}$$

Donc h' est pas équitable

b.

i	+15	+5	-5
P(X=i)	0.25	0.5	0.25

$$E(X) = 0.25 \cdot 15 + 0.5 \cdot 5 + 0.25 \cdot (-5) = 5$$

EXERCICE 8.64

	2R	1R	0R
P(X)	$\left(\frac{3}{7}\right)^2$	$\frac{24}{49}$	$\left(\frac{4}{7}\right)^2$
	m^3	$\frac{m}{2}$	0



$$P(2R) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \quad P(1R) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = 2 \cdot \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$$

$$P(0R) = \left(\frac{4}{7}\right)^2$$

$$E(X) \geq m \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^2 m^3 + \frac{24}{49} \frac{m}{2} \geq m \Leftrightarrow \frac{9}{49} m^3 + \frac{12}{49} m \geq m \Leftrightarrow \frac{9}{49} m^3 + \frac{12}{49} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{49} m^3 \geq 1 - \frac{12}{49} = \frac{37}{49} \Leftrightarrow m^3 \geq \frac{37}{9} \Leftrightarrow m \geq \frac{\sqrt[3]{37}}{3}$$

EXERCICE 8.65

$P(C) = \frac{2}{5}$ probabilité qu'il joue un morceau complètement

$P(P) = \frac{1}{2}$ — partiellement

$P(N) = \frac{1}{10}$ ne joue pas le morceau

a. loi binomiale: X : les morceaux joués partiellement.

$n = 9$, $p = \frac{1}{2}$, $k = 4$.

$$P(X=4) = \binom{9}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 24,61\%$$

b. X : les morceaux joués complètement.

$n = 9$, $p = \frac{2}{5}$, $k \geq 2$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{9}{0} \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^9 - \binom{9}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^8 = 92,95\%$$

c. X : le nombre de morceaux joués par l'orchestre.

$$P(X=1) = \frac{1}{10}$$

$X=2$: Paul a joué partiellement ou complètement le 1^{er} morceau et pas du tout le 2^e.

Ainsi

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$$

$X=3$: Paul a joué partiellement ou complètement les 2 premiers morceaux et pas du tout le 3^e. Ainsi

$$P(X=3) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{81}{1000}$$

$X=n$: Paul a joué partiellement ou complètement les $n-1$ premiers morceaux et pas du tout le n^e . Ainsi

$$\underline{P(X=n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{10}}$$

d. On cherche la probabilité conditionnelle

$P(C/\bar{U})$ où $\bar{U}$: Paul joue le morceau

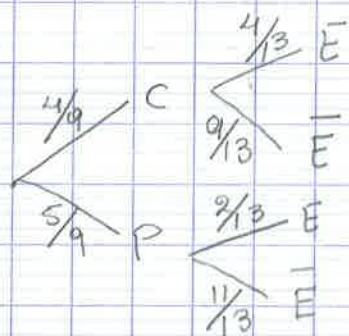
C : Paul joue le morceau complètement

$$P(C/\bar{U}) = \frac{P(C \cap \bar{U})}{P(\bar{U})} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9} = 44.44\%$$

On cherche: $P(P/\bar{U})$ où P : Paul joue partiellement.

$$P(P/\bar{U}) = \frac{P(P \cap \bar{U})}{P(\bar{U})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9} = 55.56\%$$

e.



$$P(E) = P(C \cap E) + P(P \cap E) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{13} = 22.22\% = \frac{2}{9}$$

f. X : les nombres de morceaux joués avec erreur.

$$p = \frac{2}{9} \quad n = ?$$

$$P(X \geq 1) \geq 0.989 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0.989 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.011 \geq \binom{n}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^n \Leftrightarrow 0.011 \geq \left(\frac{7}{9}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log 0.011 \geq n \log \left(\frac{7}{9}\right) \Leftrightarrow n \geq 17.95 \Rightarrow \underline{n=18}$$

g. Le jeu étant équitable, l'expérience de gain doit être nulle.

la probabilité que Paul fasse une erreur vaut $\frac{2}{9} = P(E) \Rightarrow P(\bar{E}) = \frac{7}{9}$

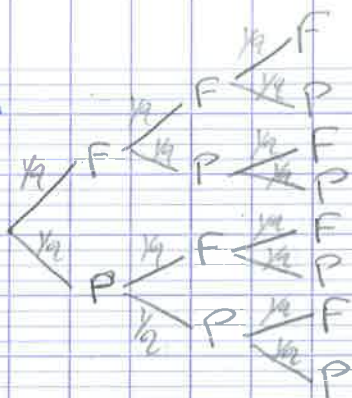
Soit n le nombre de musiciens (y compris Paul)
l'expérience s'écrit

$$14 \cdot \frac{2}{9} + (-0.5) \cdot \frac{7}{9}(n-1) = 0 \Rightarrow \frac{28}{9} - \frac{7}{18}(n-1)$$

$$\Rightarrow 56 - 7(n-1) = 0 \Rightarrow 7(n-1) = 56 \Rightarrow \underline{n=9}$$

EXERCICE 8.66

a.



$$P(0F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(1F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$

$$P(2F) = \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$

$$P(3F) = \frac{1}{8}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

probabilité

$\frac{3}{8}$
 $\frac{6}{8}$
 $\frac{4}{8}$
 $\frac{2}{8}$



nombres de faces obtenues

b. Sans remise



X = nombre de boules blanches obtenues

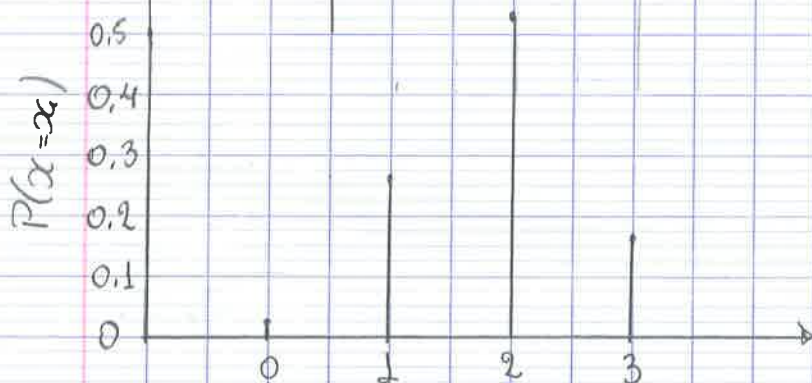
$$P(X=0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{56} + \frac{5}{56} + \frac{5}{56}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{5}{28} = \frac{15}{28}$$

$$P(X=3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{48}$	$\frac{5}{48}$



Nb de boules blanches obtenues

c. 2

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

X: la somme des points obtenus.

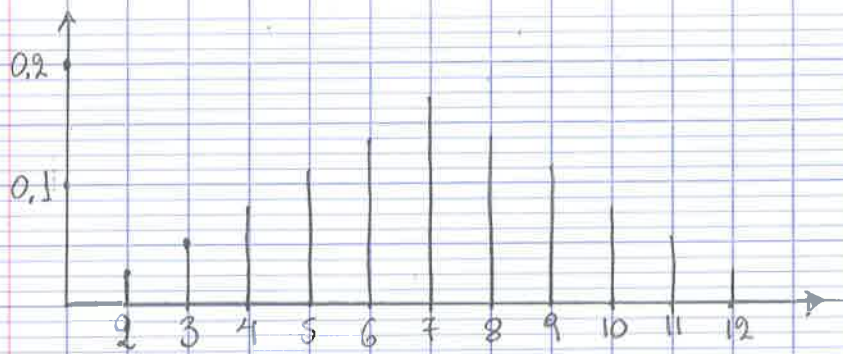
$$P(X=2) = \frac{2}{36} \quad P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(X=6) = \frac{5}{36} \quad P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=8) = \frac{5}{36} \quad P(X=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(X=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad P(X=12) = \frac{1}{36}$$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$



$$P(3 \leq X \leq 6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2+3+4+5}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

EXERCICE 8.6 X : nombre de garçons dans une famille de

a. 6 enfants
 $p = \frac{1}{2}$, $n = 6$.

$$P(X=0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$P(X=1) = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

...

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

$$b. E(X) = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{3}{32} + 2 \cdot \frac{15}{64} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{64} =$$

$$= \frac{0 + 6 + 30 + 20 + 3 + 6 + 6}{64} = \frac{192}{64} = 3$$

$$E(X^2) = \frac{0^2 + 1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 20 + 4^2 \cdot 15 + 5^2 \cdot 6 + 6^2 \cdot 1}{64} = \frac{672}{64}$$

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{\frac{672}{64} - 9} = \sqrt{1.5} \approx 1.225$$

Comme la distribution est binomiale $B(6, \frac{1}{2})$

on a: $\mu = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1.5}$

EXERCICE 8.68 X : les points gagnés

x_i	100	30	10	-150
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{10} + 30 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{2} - 150 \cdot \frac{1}{5} = 10 + 10 + 5 - 10 = 15$$

$$E(X^2) = 100^2 \cdot \frac{1}{10} + 30^2 \cdot \frac{1}{3} + 10^2 \cdot \frac{1}{2} + 150^2 \cdot \frac{1}{5} = 2850$$

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{2850 - 15^2} = \sqrt{2625}$$

$\Rightarrow \sigma = 51.23$

EXERCICE 8.69

$$P(D) = 0.01$$

$n=10$ $p=0.01$ X : les vis qui ont un défaut dans le paquet de 10 vis

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) = \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.01^0 0.99^{10} - \binom{10}{1} 0.01^1 0.99^9 = \\ &= 1 - 0.99^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9 \approx 0.4\% \end{aligned}$$

EXERCICE 8.68 X: les points gagnés

x_i	100	30	10	-150
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{10} + 30 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{2} - 150 \cdot \frac{1}{5} = 10 + 10 + 5 - 10 = 15$$

$$E(X^2) = 100^2 \cdot \frac{1}{10} + 30^2 \cdot \frac{1}{3} + 10^2 \cdot \frac{1}{2} + 150^2 \cdot \frac{1}{5} = 2850$$

$$G = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{2850 - 15^2} = \sqrt{2625}$$

$$\Rightarrow G \approx 51.23$$

EXERCICE 8.69

$$P(D) = 0.01$$

$n=10$ $p=0.01$ X: les vis qui ont un défaut dans le paquet de 10 vis

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) = \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.01^0 0.99^{10} - \binom{10}{1} 0.01^1 0.99^9 = \\ &= 1 - 0.99^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9 \approx 0.4\% \end{aligned}$$

EXERCICE 8.10 X: nombre des faces

$$n=5 \quad p=\frac{1}{2}$$

$$a. P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$$

...

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$b. E(X) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + \dots + 5 \cdot \frac{5}{32} = 2.5$$

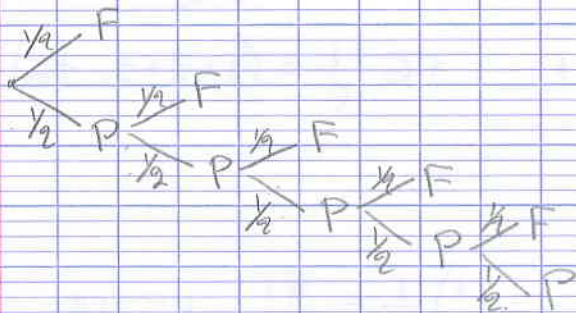
$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{32} + 1^2 \cdot \frac{5}{32} + \dots + 5^2 \cdot \frac{5}{32} = 7.5$$

$$\sigma^2 = 7.5 - 2.5^2 \Rightarrow \sigma^2 = 1.25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1.25} = 1.12$$

$$c. X^* = \frac{X - 2.5}{1.12} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

EXERCICE 8.71 On a la situation.



X : nombres de lancers.

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \quad P(X=2) = \frac{1}{4} \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad P(X=5) = 2 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

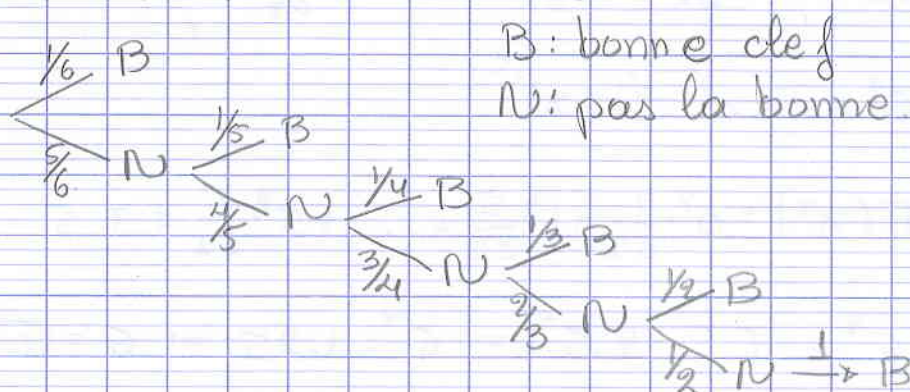
x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{62}{32} = \frac{31}{16} = 1.9375$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots + 5^2 \cdot \frac{1}{16} = 5.1875$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = 5.1875 - \left(\frac{31}{16}\right)^2 \Rightarrow \sigma^2 = 1.43 \Rightarrow \sigma = 1.2$$

EXERCICE 8.72 On a la situation suivante:



X: Nombre d'essais.

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \quad P(X=2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \quad \dots \quad P(X=K) = \frac{1}{6}$$

$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = (1+2+3+\dots+6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\Rightarrow \mu = 3.5$$

$$E(X^2) = (1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15.1\bar{7}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 15.1\bar{7} - 3.5^2 \Rightarrow \sigma^2 = 2.92 \Rightarrow \sigma = 1.7$$

EXERCICE 8.73

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{25} \frac{K}{(x-26)^2} dx + \int_{25}^{+\infty} \frac{K}{(24-x)^2} dx =$

$$= K \int_0^{25} (x-26)^{-2} dx + K \int_{25}^{+\infty} (24-x)^{-2} dx =$$

$$= K \left[\frac{1}{-1} (x-26)^{-1} \right]_0^{25} - K \left[\frac{1}{-1} (24-x)^{-1} \right]_{25}^{+\infty} =$$

$$K \left(-\frac{1}{x-26} \right)_{25}^{25} - K \left(-\frac{1}{24-x} \right)_{25}^{+\infty} =$$

$$= K \left(-\frac{1}{-1} + \frac{1}{-26} \right) - K \left(0 + \frac{1}{-1} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K \left(1 - \frac{1}{26} \right) + K = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K \cdot \left(1 + 1 - \frac{1}{26} \right) = 1 \Leftrightarrow K \left(2 - \frac{1}{26} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K \left(\frac{51}{26} \right) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{26}{51}$$

$$b. P(17.5 \leq x \leq 18.5) = \int_{17.5}^{18.5} f(x) dx *$$

$$F(x) = \int f(x) dx = -\frac{26}{51(x-26)}$$

$$* = F(18.5) - F(17.5) = -\frac{26}{51(18.5-26)} + \frac{26}{51(17.5-26)} =$$

$$= +\frac{26}{51} \frac{1}{7.5} - \frac{26}{51} \frac{1}{8.5} = \frac{26}{51} \left(\frac{1}{7.5} - \frac{1}{8.5} \right) = 0.01$$

$$P(24.5 \leq x \leq 25.5) = \int_{24.5}^{25.5} f(x) dx =$$

$$= \frac{26}{51} \int_{24.5}^{25} (x-26)^{-2} dx + \frac{26}{51} \int_{25}^{25.5} (24-x)^{-2} dx \approx 0.34$$

$$P(x > 26) = \int_{26}^{+\infty} f(x) dx \approx 0.25$$

EXERCICE 8.14

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = 1 = c \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^{+\infty} = 1$

$$\Rightarrow c \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + \frac{1}{3} e^0 \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow c \left(0 + \frac{1}{3} \right) = 1 \Rightarrow \underline{c = 3}$$

b. $P(1 < x \leq 2) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 3e^{-3x} dx = 3 \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_1^2 =$
 $= -e^{-3x} \Big|_1^2 = -e^{-6} + e^{-3} = 0.047308$

$$P(x > 3) = \int_3^{+\infty} 3e^{-3x} dx = \frac{1}{e^9} \approx 0.00012341 = 0.012\%$$

$$P(x < 1) = \int_0^1 3e^{-3x} dx = 1 - \frac{1}{e^3} \approx 0.95021 = 95.02\%$$

c. $E(x) = \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 3x e^{-3x} dx =$
 $= 3 \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-3x} dx - \frac{1}{3^2} =$$

 $= \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{3}$

EXERCICE 8.15

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^4 \frac{k}{\sqrt{x}} dx = 1 \Leftrightarrow k \int_0^4 x^{-1/2} dx = 1 \Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b. P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}$$

$$c. \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^4 x^{1/2} dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4\sqrt{x}} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \int_0^4 x^{3/2} dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{4} \int_0^4 x^{3/2} dx - \frac{16}{9} = \\ &= \frac{16}{5} - \frac{16}{9} = 16 \left(\frac{9-5}{45} \right) = 16 \cdot \frac{4}{45} = \frac{64}{45} \end{aligned}$$

EXERCICE 8.16

$$a. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b. F(c) &= P(X \leq c) = \int_{-\infty}^c f(x) dx = \int_a^c \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^c dx = \\ &= \frac{c-a}{b-a} \quad \text{ou} \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

$$c. E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sigma^2 &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{(a-b)^2}{12} \Rightarrow \sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

Exercice 8.16 a) l'expression fonctionnelle $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$
 b) l'expression fonctionnelle $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

c) la moyenne $\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2}(a+b)$

la variance $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Exercice 8.17 a) $P(X > 12) = 1 - \Phi(12) = 1 - 1 = 0$
 b) $P(X < 1.55) = \Phi(1.55) = 0.9394$
 c) $P(X < -1.43) = P(X > 1.43) = 1 - \Phi(1.43) = 0.0764$
 d) $P(X > -0.64) = P(X < 0.64) = \Phi(0.64) = 0.7389$
 e) $P(0.3 < X \leq 1.4) = \Phi(1.4) - \Phi(0.3) = 0.3013$
 f) $P(-2.03 < X < -1.65) = \Phi(-1.65) - \Phi(-2.03) =$
 $= 1 - \Phi(1.65) - 1 + \Phi(2.03) = \Phi(2.03) - \Phi(1.65) =$
 $= 0.9788 - 0.9505 = 0.0283$
 g) $P(-1.15 < X \leq -0.38) = \Phi(-0.38) - \Phi(-1.15) =$
 $= 1 - \Phi(0.38) - 1 + \Phi(1.15) = \Phi(1.15) - \Phi(0.38) =$
 $= 0.8749 - 0.648 = 0.2269$
 h) $P(|X| > 1.45) = P(X < -1.45) + P(X > 1.45) =$
 $= 1 - \Phi(1.45) + 1 - \Phi(1.45) = 2 - 2\Phi(1.45) = 0.147$
 i) $P(|X| < 0.9) = P(-0.9 < X < 0.9) =$
 $= \Phi(0.9) - \Phi(-0.9) = \Phi(0.9) - 1 + \Phi(0.9) =$
 $= 2\Phi(0.9) - 1 = 0.6319$

2. $N(2.3; 0.8)$

a) $P(1.4 < X < 1.8) = P\left(\frac{1.4-2.3}{0.8} \leq Z < \frac{1.8-2.3}{0.8}\right) =$
 $= P(-1.125 < Z < -0.625) = \Phi(-0.625) - \Phi(-1.125) =$
 $= 1 - \Phi(0.625) - 1 + \Phi(1.125) = \Phi(1.125) - \Phi(0.625) =$
 $= 0.8697 - 0.734 = 0.1357$

$$b) P(1.9 < X < 2.6) = P(-0.5 < Z < 0.375) = \Phi(0.375) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.375) - 1 + \Phi(0.5) = 0.6462 - 1 + 0.6915 = 0.3377$$

$$c) P(2.4 < X < 3.1) = P(0.125 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(0.125) = 0.7996 - 0.5498 = 0.2498$$

EXERCICE 8.78

$$X \sim N(11.5; 0.2) \Rightarrow Z = \frac{X - 11.5}{\sqrt{0.2}} \sim N(0, 1)$$

$$a) P(11.6 < X < 11.9) = P(0.5 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(0.5) = 0.9772 - 0.6915 = 0.2857$$

$$b) P(X < 11.2) = P(Z < -1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$$c) P(X > 11.4) = P(Z > -0.5) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915$$

$$d) P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma) = P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

EXERCICE 8.79

$$X \sim N(179; 5) \Rightarrow Z = \frac{X - 179}{5} \sim N(0, 1)$$

$$a) P(X < 160) = P(Z < -3.8) = 1 - \Phi(3.8) = 1 - 0.9999 = 0.0001$$

$$b) P(X > 185) = P(Z > 1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

$$c) P(165 < X < 180) = P(-2.8 < Z < 0.2) = \Phi(0.2) - \Phi(-2.8) = \Phi(0.2) - 1 + \Phi(2.8) = 0.5793 - 1 + 0.9994 = 0.5677$$

EXERCICE 8.80

$$X \sim N(64; 6) \Rightarrow Z = \frac{X - 64}{6} \sim N(0, 1)$$

$$P(X > x_0) = 0.1 \Rightarrow P\left(\frac{X - 64}{6} > \frac{x_0 - 64}{6}\right) = 0.1 \Rightarrow Z_0 = 1.282 \Rightarrow 1.282 = \frac{x_0 - 64}{6} \Rightarrow x_0 = 71.692$$

EXERCICE 8.81

$$X \sim N(62; 9.8)$$

$$a) P(X > x_0) = 0.6 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x_0 - 62}{\sqrt{9.8}}\right) = 0.6 \Rightarrow Z_0 = -0.253 \Rightarrow \frac{x_0 - 62}{\sqrt{9.8}} = -0.253 \Rightarrow x_0 = 60$$

b) A: le candidat admis à se présenter à l'oral.
B: $P(80 < X < 85)$

On cherche la probabilité $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$$P(A) = P(X > x_0) = 0.6$$

$$P(A \cap B) = P(B) = P(80 < X < 85) = P(1.84 < Z < 2.35) = \Phi(2.35) - \Phi(1.84) = 0.9906 - 0.9671 = 0.0235$$

$$P(B/A) = \frac{0.0235}{0.6} = 0.0392$$

EXERCISE 8.82

$$X \sim N(0; 1)$$

$$a) P(X < t) = 0.9 \Rightarrow \Phi(t) = 0.9 \Rightarrow t = 1.282$$

$$b) P(X > t) = 0.9 \Rightarrow 1 - \Phi(t) = 0.9 \Rightarrow \Phi(t) = 0.1 \Rightarrow t = -1.282$$

$$c) P(|X| < t) = 0.9 \Rightarrow P(-t < X < t) = 0.9 \Rightarrow \Phi(t) - \Phi(-t) = 0.9 \Rightarrow \Phi(t) - 1 + \Phi(t) = 0.9 \Rightarrow 2\Phi(t) = 1.9 \Rightarrow \Phi(t) = 0.95 \Rightarrow t = 1.645$$

EXERCISE 8.83

$$X \sim (M; 0.03M)$$

$$P(X < 1) = 0.95 \Rightarrow P(Z < \frac{1-M}{0.03M}) = 0.95 \Rightarrow \Phi(z_0) = 0.95$$

$$\Rightarrow z_0 = 1.645 = \frac{1-M}{0.03M} \Rightarrow 0.05M = 1-M \Leftrightarrow 1.05M = 1 \Rightarrow M = 0.953 \text{ kg}$$

EXERCISE 8.84

$$X \sim \text{Bin}(100; \frac{1}{2}) \quad \text{approximation} \quad X \sim N(100 \cdot \frac{1}{2}; \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}})$$

$$a) P(X < 60) = P(Z < \frac{60+0.5-50}{5}) =$$

$$X \sim N(50; 5)$$

$$= P(Z < 2.1) = \Phi(2.1) = 0.9821$$

$$b) P(X < 35) = \Phi(\frac{35+0.5-50}{5}) = \Phi(-2.9) = 1 - \Phi(2.9) = 0.0019$$

$$c) P(35 < X < 60) = \Phi(\frac{60+0.5-50}{5}) - \Phi(\frac{35+0.5-50}{5}) =$$

$$= \Phi(2.1) - \Phi(-2.9) = 0.9821 - 0.0019 = 0.9802$$

EXERCISE 8.84

$$X \sim \text{Bin}(400; \frac{1}{2}) \rightsquigarrow X \sim N(400 \cdot \frac{1}{2}; \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}) = N(200; 10)$$

$$P(|X| < t) = 0.9 \Rightarrow P(-t < X < t) = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{t+0.5-200}{10}) - \Phi(\frac{t-0.5-200}{10}) = 0.9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_0 = \pm 1.645$$

$$\frac{t+0.5-200}{10} = -1.645 \Rightarrow t = 184$$

$$\frac{t+0.5-200}{10} = 1.645 \Rightarrow t = 216$$

[184; 216]