

EXERCICE 8.7.

a) $P_7 = 7! = 5040$ b) $(7-1)! = 6! = 720$
car il n'y pas 1^{ère} et dernier.

EXERCICE 8.18.

On doit ranger 11 objets mais les 7 sont semblables (et les autres 4 aussi)
Alors on a permutation avec répétition.

$$\bar{P}_{(7,4)} = \frac{P_{11}}{P_7 P_4} = \frac{11!}{7! 4!} = 330.$$

EXERCICE 8.19.

$$P_{4;3;1} = \frac{8!}{4! 3!} = 280$$

EXERCICE 8.20

On a les possibilités suivantes:
J = boule jaune, V = boule verte.

tiroir bleu	tiroir jaune	tiroir gris	permutation entre les tiroirs
JJV	V	$\emptyset$	6
JVV	J	$\emptyset$	6
JJ	VV	$\emptyset$	6
JV	JV	$\emptyset$	6
JJ	V	V	3
VV	J	J	3
JV	J	V	6
JJVV	$\emptyset$	$\emptyset$	3

Donc on a $6+6+6+6+3+3+6+3 = 39$ possibilités

EXERCICE 8.21

a) $P_5 = 5! = 120$

$$\overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

possibilités

b) On commence par choisir 5 boules parmi 12 sans tenir compte de l'ordre. On a $\binom{12}{5}$ manières de le faire. On les place ensuite dans 5 boîtes et on a $5!$ manières de les placer.

Ainsi le nombre de manières différentes est $\binom{12}{5} \cdot 5! = \underline{95'040}$.

Autrement on a un arrangement simple A_5^{12} de 5 objets parmi 12.

$$A_5^{12} = \frac{12!}{12-5} = \frac{12!}{7!} = \underline{95040}$$

c) $\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = 2^5$

Pour chaque place on a 2 possibilités blanche ou noire.

Alors : nb de manières différentes = $= 2^5 = 32$

d) On pense qu'on doit ranger 20 boîtes de 3 types : 7 blanches, 10 noires et 3 vides. Les boules (boîtes) de chaque type sont semblables donc le nombre de manières différentes correspond au nombre de permutations avec répétition.

$$\frac{20!}{7! \cdot 10! \cdot 3!} = \underline{22'170'270}$$

c) 6B 10N $\rightarrow$ 9 boîtes

Si on avait 9 boules blanches au lieu de 6 à disposition, le nombre de manières différentes serait 2^9 .

Comme on n'a que 6 boules, on doit retirer à 2^9 le nombre de possibilités avec 7, 8 et 9 boules blanches:

- pour 9 boules blanches on a 1 possibilité.
- pour 8 boules blanches on a 9 possibilités.
(qui correspond à $\binom{9}{8}$, nombre de manières de mettre 8 boules blanches parmi 9);
- pour 7 boules blanches, on a $\binom{9}{7}$ possibilités.
(nombre de manières de mettre 7 boules blanches parmi 9) on a $\binom{9}{7} = 36$.

Le nombre de manières différentes est donc: $2^9 - 1 - 9 - 36 = \underline{466}$

f) Si les 2 boîtes médianes contiennent chacune une boule blanche, il nous reste à placer 8 boules blanches et 10 boules noires dans les 18 boîtes restantes.

Le nombre de manières différentes est alors: $\binom{18}{8} = \binom{18}{10} = \underline{43758}$

EXERCICE 8.22

a) Si il doit y avoir 1 jeton rouge pour colonne, on a 3 possibilités de le placer dans chaque colonne, donc au total, $3^5 = \underline{243}$ possibilités.

b) S'il doit y avoir 1 jeton de chaque couleur pour colonne pour un ordre de couleurs fixé, on a, comme en a, 243 possibilités. En plus il y a $5!$ ordres de couleurs (5 possibilités dans la 1^{re} colonne, 4 dans la 2^e etc). Ainsi, au total, il y a $243 \cdot 5! = 243 \cdot 120 = \underline{29'160}$ possibilités.

c) Cela correspond à choisir 5 cases au hasard parmi les 15. Il y a donc $\binom{15}{5} = \underline{3003}$ possibilités.

d) Pour un ordre fixé de couleurs, on a (comme en c.) 3003 possibilités. En outre, il y a $5!$ manières de placer les 5 couleurs parmi les cases choisis. Ainsi, au total, il y a

$$3003 \cdot 5! = \underline{360'360} \text{ possibilités}$$

EXERCICE 8.23 a) Pour un ordre des lettres fixes, on a le choix de 2 voyelles parmi 5 et de 3 consonnes parmi 21, soit $\binom{5}{2} \cdot \binom{21}{3} = 13'300$ possibilités. En outre, on a $5! = 120$ ordres possibles des 5 lettres. On a donc, au total, $13'300 \cdot 120 = \underline{1'596'000}$ possibilités.

b) Les mots doivent contenir la lettre B et 2 voyelles différentes et 3 consonnes différentes (dont 2 consonnes différentes de B). Pour un ordre des lettres fixes, on a le choix de 2 voyelles parmi 5 et de 2 consonnes parmi 20, soit $\binom{5}{2} \cdot \binom{20}{2} = 1900$ possibilités. En outre on a $5! = 120$ ordres possibles des 5 lettres. On a donc, au total, $1900 \cdot 120 = \underline{228'000}$ possibilités.

EXERCICE 8.24. a) Il y a 36 cartes et chaque joueur en reçoit 9. Il y a donc $\binom{36}{9} = 94'143'280$ possibilités (on ne tient pas compte de l'ordre).

b) Pour le 1^{er} joueur, il y a $\binom{36}{9}$ possibilités. Pour le 2^e joueur, il reçoit 9 cartes parmi les 27 restantes; il y a donc $\binom{27}{9}$ possibilités. Pour le 3^e joueur, il reçoit 9 cartes parmi les 18 restantes, il y a donc $\binom{18}{9}$ possibilités. Pour le 4^e joueur, il reçoit 9 cartes parmi les 9 restantes, il y a donc $\binom{9}{9} = 1$ possibilité.

Alors au total on a:

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} \approx 2,145 \cdot 10^{19} \text{ possibilités.}$$

c) Si le joueur IV reçoit les 4 valets, il y a $\binom{32}{5}$ possibilités pour les 5 autres cartes qu'il reçoit.

Pour les 3 autres joueurs, les possibilités sont $\binom{27}{9}$, $\binom{18}{9}$ et $\binom{9}{9}$.

$$\text{Au total, il y a donc } \binom{32}{5} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} \\ \approx \underline{4.589 \cdot 10^{16}} \text{ possibilités}$$

d) le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes pour 36 est $\binom{36}{5} = 376'992$.
 le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes sans aucun as est $\binom{32}{5} = 201'376$.
 le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes contenant au moins un as est $\binom{36}{5} - \binom{32}{5} = \underline{175'616}$.

EXERCICE 8.25. Pour 1 match, on a 3 possibilités.
 Ainsi, pour 13 matchs, on a

$$3^{13} = 1'594'323 \text{ possibilités.}$$

EXERCICE 8.26.

Il s'agit de permutations avec répétitions. Tout d'abord, on a les 3 groupes qu'on permute de tous les façons: $3! = 6$. Ensuite, à l'intérieur des 3 groupes de livres, on a respectivement $5!$, $4!$, et $3!$ permutations possibles: au total $5!4!3!$. Ainsi, tout ensemble, il y a

$$6 \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = \underline{103'680} \text{ possibilités}$$

EXERCICE 8.27. a) On permute 4 lettres: le nombre de possibilités est $4! = 24$

b) On permute 6 lettres dont 3 sont identiques: le nombre de possibilités est $\frac{6!}{3!} = 120$

c) On permute 12 lettres dont le 0 apparaît 3 fois, le 1 2 fois: le nombre de possibilités est $\frac{12!}{2!3!} = 39916800$

EXERCICE 8.28. Il y a 26 possibilités pour le 1^{er} chiffre, 25 " " " " 2^e " " " "

Celle doit être différente de la 1^{re}

9 possibilités pour le 1^{er} chiffre

(il doit être différent de zéro)

et 10 possibilités pour chaque autre chiffre

Au total, il y a donc

$$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = \underline{585'000} \text{ possibilités}$$

EXERCICE 8.29 Pour le 1^{er} des 4 chiffres, on a 9 possibilités ($\neq 0$).
 Pour le 2^e des 4 chiffres, on a 9 ...
 (les 10 possibilités de 0 à 9, moins celle du 1^{er} chiffre).
 Pour le 3^e des 4 chiffres, on a 8 possibilités.
 Pour le 4^e des 4 chiffres, on a 7 possibilités.
 Au total, on a $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ possibilités.

EXERCICE 8.30 a) Si on remet la carte tirée dans le paquet à chaque fois, on a pour chaque tirage d'une carte 52 possibilités.
 Au total on a donc $52^3 = 140'608$ possibilités.
 b) Si on ne remet pas la carte tirée dans le paquet, comme on tient compte de l'ordre, on a le nombre d'arrangements de 3 cartes parmi 52:

$$A_3^{52} = 132'600 \text{ possibilités}$$

EXERCICE 8.31 a) Pour la 1^{re} place, on a 5 possibilités.
 Pour la 2^e place, 4 ...
 " 3^e " 3 " etc.
 Ainsi on a $5! = 120$ possibilités.
 b) Pour les deux filles, on a $2! = 2$ possibilités.
 Pour les 3 garçons, on a $3! = 6$ possibilités.
 Pour placer les 2 groupes (filles et garçons) on a 2 possibilités.
 Au total on a donc $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ possibilités.
 c) Pour les 2 filles on a $2! = 2$ possibilités.
 Pour placer les 2 filles et les 3 garçons (4 éléments), on a $4! = 24$ possibilités.
 Au total, on a donc $2 \cdot 24 = 48$ possibilités.

EXERCICE 8.32. a) les 3 Américains ont $3! = 6$ possibilités de se placer entre eux

les 4 Français ont $4! = 24$ " " "

les 4 Danois ont $4! = 24$ "

les 2 Italiens ont $2! = 2$ "

les 4 groupes ont $4!$ possibilités de se placer entre eux.

Au total, on a donc $3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 4! = 165\,888$ possibilités.

b) Comme il y a 4 groupes, la table est ronde on a.

$$3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3! = 41\,472$$

EXERCICE 8.33 Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 3 hommes parmi 7 (l'ordre ne compte pas) multiplié par le nombre de possibilités de choisir 2 femmes parmi 5. On a donc $\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350$ possibilités.

EXERCICE 8.34 a) Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 3 questions parmi 10 (l'ordre ne compte pas). Il y a donc $\binom{10}{3} = 120$ possibilités.

b) S'il doit répondre aux 3 premières questions, il doit répondre à 5 questions parmi les 7 restantes. Il y a donc $\binom{7}{5} = 21$ possibilités.

c) S'il répond aux 5 premières questions il doit répondre à 3 questions parmi les 5 dernières. Il y a alors $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

S'il répond à 4 questions parmi les 5 premières, il a 5 possibilités à ce niveau-là. En outre il doit répondre à 4 questions parmi les 5 dernières. A nouveau 5 possibilités. Au total, ici, $5 \cdot 5 = 25$ possibilités.

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4} = 25$$

Finalement, le nombre de possibilités s'il répond à au moins 4 des 5 premières questions est $10 + 25 = 35$

EXERCICE 8.35 a) Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 5 personnes parmi 40.

Il y a donc $\binom{40}{5} = 658'000$ possibilités.

b) Cela correspond à choisir 3 dames parmi les 25 et donc, 2 hommes parmi les 15.

Il y a donc $\binom{25}{3} \binom{15}{2} = 241'500$ possibilités.

c) Avec 3 dames: $\binom{25}{3} \cdot \binom{15}{2} = 241'500$ possibilités.

Avec 4 dames: $\binom{25}{4} \cdot \binom{15}{1} = 189'750$ possibilités.

Avec 5 dames: $\binom{25}{5} \cdot \binom{15}{0} = 53'130$ possibilités.

Au total, il y a donc

$$241'500 + 189'750 + 53'130 = 484'380 \text{ possibilités}$$

d) Le nombre de cas possibles est 658'000

Le nombre de cas favorables est le nombre de possibilités qu'il y ait au moins une dame au sein du comité. Elle est égale au nombre de cas possibles moins le

nombre de possibilités qu'il n'y ait aucune dame au sein du comité. Elle vaut donc
 $658'000 - \binom{25}{0} \binom{15}{5} = 658'000 - 3003 = 654'997$.

Ainsi le nombre de cas favorables est 654'997
 la probabilité cherchée est donc

$$\frac{654'997}{658'000} = 0.99544 = 99,544\%$$

EXERCICE 836. a) Cela correspond au nombre de combinaison de 4 éléments parmi 12. Il y a donc
 $\binom{12}{4} = 495$ possibilités.

b) le nombre de possibilités avec un seul des lycées est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 10. Comme il y a 2 lycées différents, le nombre de possibilités est ici
 $\binom{10}{3} \cdot 2 = 120 \cdot 2 = 240$

le nombre de possibilités sans aucun des 2 lycées est $\binom{10}{4} = 210$ (combinaisons de 4 éléments parmi 10)

Au total, on a ici $240 + 210 = 450$ possibilités.

d) Si la délégation contient les 2 jumeaux, il y a
 $\binom{10}{2} = 45$ possibilités pour les 2 autres délégués (combinaisons de 2 éléments parmi 10)

Si, en plus, on considère les possibilités où les jumeaux n'appartiennent pas au délégué's, on y ajoute $\binom{10}{4} = 210$ possibilités et on obtient $210 + 45 = 255$ possibilités