Exercice 1

Dériver les fonctions suivantes:

1) $f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 11x - 5$
2) $f(x) = \cos(x)$
3) $f(x) = \sqrt{x}$
4) $f(x) = \sin(x) \cdot x^2$
5) $f(x) = \dfrac{1}{4x^3 - 2}$
6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
7) $f(x) = \dfrac{5 - 7x}{9x + 3}$
8) $f(x) = (2x^2 - x)^7$
9) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 5}$
10) $f(x) = \tan(5\sqrt{x})$

Exercice 2

Dans chaque cas, déterminer l'équation de la tangent à la fonction au point donné :

1) $f(x) = x^3 - 2x + 7$ au point d'abscisse -2
2) $f(x) = \dfrac{4 - x}{x^2}$ au point d'abscisse 3
3) $f(x) = \cos(3x)$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{6}$

Exercice 3

On considère $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + k & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, une fonction définie par morceaux. Déterminer la valeur de k de sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

On considère $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 8}{x^2 - 16} & \text{si } x < -4 \\ x^3 + ax^2 - 5x + b & \text{si } x \ge -4 \end{cases}$, une fonction définie par morceaux. Que doit valoir a et b pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

Etudier complètement la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 24}{6 - 2x}$.

Exercice 6

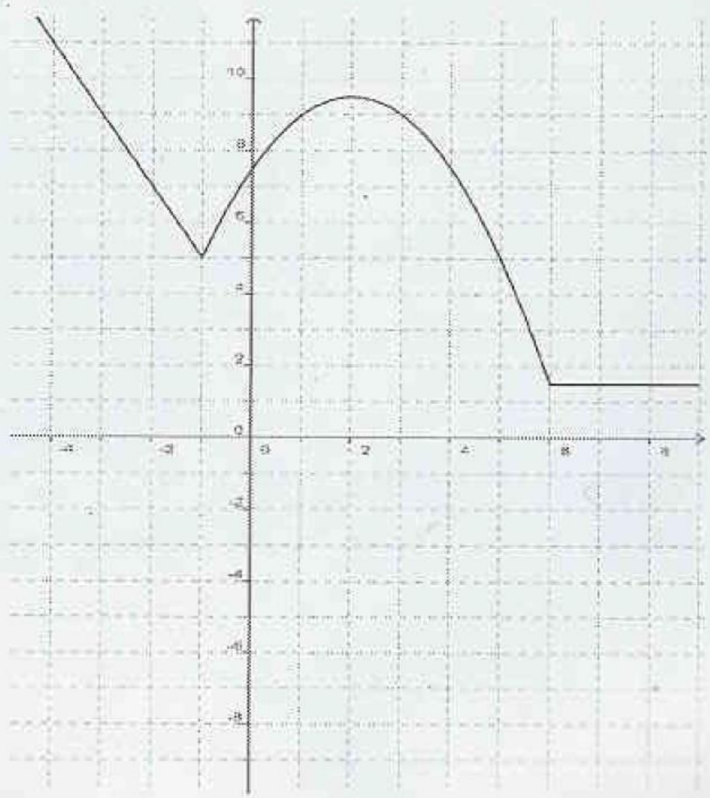
Dessinez les graphes de $f(x) = \dfrac{x^3}{8}$ et $g(x) = \sqrt{x}$ puis déterminer la valeur du plus grand espace vertical entre ces deux graphes pour $0 \leq x \leq 4$.

Exercice 7

Déterminer, après avoir représenté graphiquement la fonction $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$, la plus courte distance la séparant de l'origine.

Exercice 8

Etant donné le graphe de $y = f(x)$, dessiner la fonction $y = f'(x)$.



Exercice 9

a) Evaluer sans calculatrice :

1) $\log_2(16)$
2) $\log_7\left(\dfrac{1}{49}\right)$
3) $\log_4(1)$
4) $\log_5(5)$
5) $\log_{27}\left(\dfrac{1}{3}\right)$
6) $\log_{16}(8)$
7) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$
8) $\log_{\sqrt{2}}\left(8\sqrt{2}\right)$

b) Trouver la valeur de y :

1) $\log_y(49) = 2$
2) $\log_4(y) = -3$
3) $\log_{1/2}(y) = 8$
4) $\log_y(1296) = 4$

c) Transformer les expressions suivantes en termes de $\log(p)$, $\log(q)$ et $\log(r)$:

1) $\log(pqr)$
2) $\log(pq^2r^3)$
3) $\log(100pr^5)$
4) $\log\left(\sqrt{\dfrac{p}{q^2r}}\right)$
5) $\log\left(\dfrac{qr^7p}{10}\right)$
6) $\log\left(\sqrt{\dfrac{10p^{10}r}{q}}\right)$

d) Exprimer comme un seul logarithme et simplifier si possible :

1) $2\log(5) + \log(4)$
2) $2\log(2) + \log(150) - \log(6000)$
3) $\log(24) - \dfrac{1}{2}\log(9) + \log(125)$
4) $3\log(2) + 3\log(5) - \log(10^6)$
5) $\dfrac{1}{2}\log(16) + \dfrac{1}{3}\log(8)$
6) $\log(64) - 2\log(4) + 5\log(2) - \log(2^7)$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

1) $\log(3x) + 1 = 1{,}5$
2) $3e^x + 2 = 2e^x + 5$
3) $7^{3x-1} - 7^{2x+3} = 0$
4) $8e^x + \dfrac{1}{e^x} = 6$
5) $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$
6) $\text{Log}(99 + \text{Log}(8 + \text{Log}(x-1))) = 2$

Exercice 11

Quelles valeurs doit-on donner à la constante a pour que l'équation $x^2 - 2x + 2\log(a) = 0$ ait exactement 2 solutions réelles ? Même question pour $x^2 - 2\log(a)x + 4 = 0$.

Exercice 12

Grâce au graphe de $f(x) = e^x$, déduire celui de $g(x) = e^{-x}$ et $h(x) = e^{|x|}$.

Exercice 13

Trouver toutes les asymptotes et trous des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$
2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 3x + 2}$
3) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^{1000} + 2}$
4) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$
5) $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 2}$
6) $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 14

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction suivante: $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2 - 1)}$

b) Etablir le tableau des signes de la fonction suivante : $g(x) = \log(-x^2 + 4x + 22)$

c) Déterminer l'ensemble de définition de la dérivée de la fonction suivante : $h(x) = \log_2(3x+1)$. (Sol : $D_{f'} = \mathbb{R} \,/\, \left\{-\frac{1}{3}\right\}$)

Exercice 15

Trouver la dérivée des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = 2e^{4-2,5x}$
2) $f(x) = x^2e^{1-x}$
3) $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)e^{3x}$
4) $f(x) = 3^{3x+1}$
5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$
6) $f(x) = e^{x\cos(x)}$
7) $f(x) = \dfrac{7^{-x}+1}{x}$
8) $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{e^{-x}+1}$
9) $f(x) = 3^x \cdot x^3$
10) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
11) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$
12) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 16

Déterminer l'équation de la tangente aux courbes ci-dessous au x donné :

1) $y = x^2 + 2e^{2x}$, en $x = 2$ 2) $y = e^{-2x}$, en $x = \ln(2)$

Exercice 17

Dériver les fonctions :

1) $f(x) = \ln\left(2x-1\right)$ 2) $f(x) = 3\ln\left(x^{-2}\right)$ 3) $f(x) = \ln\left(ax+b\right)$

4) $f(x) = \ln(-x^2+6)$ 5) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 6) $f(x) = 3^x$

7) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{3x+1}\right)$ 8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)$ 9) $f(x) = \ln\left(\cos(x)\right)$

Exercice 18

Trouver l'équation de la tangente en $x = -\dfrac{1}{3}$ à la courbe $y = \ln(-x)$.

Exercice 19

Trouver l'équation de la normale en $x = 2$ à la courbe $y = \ln(2x - 3)$.

Exercice 20

Trouver tous les points à tangente horizontale des fonctions suivantes et déterminer leur nature.

1) $y = x^2 - \ln(x^2)$ 2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln(2x)$

Exercice 21

On considère deux fonctions f et g. Dans chaque cas, calculer l'angle aigu entre les deux courbes à leur point d'intersection :

1) $f(x) = \mathrm{e}^{x+2}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 2) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $g(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$

Exercice 22

Trouver la valeur du paramètre a afin que l'angle entre les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2}{a}$ et $g(x) = \dfrac{a}{x^2}$ soit droit.

Exercice 23

Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ 2) $f(x) = x\ln(x)$

3) $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$ 4) $f(x) = (2x^2 - 4) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 24

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - 3$. Etudier cette fonction en soignant particulièrement le comportement de f et f' proche de l'origine.

Exercice 25

Trouver une expression générale de la fonction $f(x)$:

1) $f'(x) = 4x^3$
2) $f'(x) = 2x$
3) $f'(x) = 10x^9 - 8x^7 - 1$
4) $f'(x) = 9x^2 - 4x - 5$
5) $f'(x) = 2x^2 - 3x - 4$
6) $f'(x) = 1 - 5x - 7x^2$

Exercice 26

On sait que f passe par $(-4;9)$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{4}x + 1$. Trouver $f(x)$.

Exercice 27

Soit $f'(x) = 15x^2 - 6x + 4$ et $f(1) = 0$, trouver $f(x)$.

Exercice 28

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1) $\displaystyle\int 4x\,dx$
2) $\displaystyle\int 1\,dx$
3) $\displaystyle\int 9\,dx$
4) $\displaystyle\int a\,dx$
5) $\displaystyle\int x^2\,dv$
6) $\displaystyle\int t^5\,dt$
7) $\displaystyle\int \frac{1}{2}x^8 dx$
8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$
9) $\displaystyle\int 6x^2 - 2x - 5\,dx$
10) $\displaystyle\int x(x+2)(x-2)\,dx$
11) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$
12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
13) $\displaystyle\int e^{3x}dx$
14) $\displaystyle\int e^{-x}dx$
15) $\displaystyle\int e^{3-2x}dx$
16) $\displaystyle\int \sin(5x)\,dx$

Exercice 29

Evaluer les intégrales définies ci-dessous :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(6x^2+1\right)dx$ 2) $\displaystyle\int_{0}^{1}(2x+1)(x+3)\,dx$ 3) $\displaystyle\int_{0}^{8}12\sqrt[3]{x}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{3}{x^2}dx$ 5) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{8}{x^3}+x^3\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{4}^{9}\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}dx$

7) $\displaystyle\int_{0}^{\ln(2)}2e^{1-2x}\,dx$ 8) $\displaystyle\int_{0}^{1}e^{x\ln(2)}\,dx$ 9) $\displaystyle\int_{1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Exercice 30

Calculer l'aire sous le graphe de $f(x)=x^4+5$ de $x=-1$ à $x=1$.

Exercice 31

Calculer l'aire sous la courbe $y=\dfrac{6}{x^4}$ entre $x=1$ et $x=2$.

Exercice 32

Trouver la valeur de l'aire délimitée par $y=e^{2x}$, les axes et la droite $x=2$.

Exercice 33

Trouver une primitive pour chacune des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=\dfrac{6x^4+5}{x^2}$

2) $f(x)=\sin(-5x+3)$

3) $f(x)=(-2x+7)e^{-x^2+7x-4}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{-9x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\sin(\sqrt{x+1})$

6) $f(x)=\dfrac{-3}{1-3x}$

7) $f(x)=-5\sin(5x)e^{\cos(5x)}$

8) $f(x)=\dfrac{4x-9}{2x^2-9x+2}$

9) $f(x)=(6x+1)^7$

10) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{x-3}$

11) $f(x)=\dfrac{5x^2+4x-8}{3x-1}$

12) $f(x)=\dfrac{-3x^5+1}{x^3}$

Exercice 34

Calculer les primitives suivantes :

$a) \int \frac{u}{\sqrt{u^2+4}} du$ $b) \int \frac{\cos(x)}{\left(1+\sin(x)\right)^2} dx$

Calculer les intégrales suivantes :

$c) \int_0^3 \sqrt{x+1} dx$ $d) \int_0^1 \sqrt[n]{1-x} dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$e) \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ (changement de variable $x = 3\sin(t)$)

Exercice 35

Déterminer la valeur de k afin que :

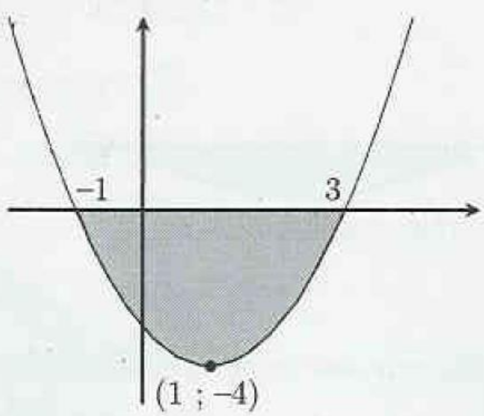
a) $\int_{-1}^{2} kx^2 dx = \frac{2}{3}$ $(Sol : k = \frac{2}{9})$

b) $\int_0^{k/2} \cos(t) dt = \frac{1}{2}$ $(Sol : k_1 = \frac{\pi}{3} + m \cdot 4\pi$ et $k_2 = \frac{5\pi}{3} + m \cdot 4\pi,\ m \in \mathbb{Z})$

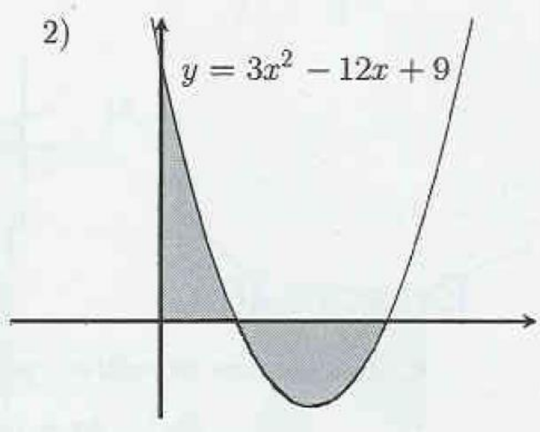
Exercice 36

Calculer l'aire grisée :

1)



2)



EXERCICE 37

- Pour quelle valeur du paramètre $a > 0$ la courbe d'équation $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ délimite-t-elle avec l'axe O_x, dans le premier quadrant un domaine d'aire égale à 6 (solution $a = 2\sqrt{2}$)
- Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les graphes des fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ et $x \mapsto mx$ soit égal à 9. (solution $m = \frac{3}{2}$)

EXERCICE 38

En intégrant par parties, trouver une primitive des fonctions :

1) $f(x) = (2x+3) \cdot e^x$ 2) $f(x) = \ln(x)$ 3) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

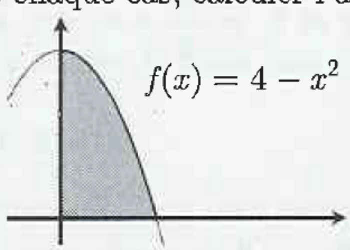
4) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ 5) $f(x) = x^2 \sin(x)$ 6) $f(x) = x(1-x)^4$

7) $f(x) = -4x\ln(x)$ 8) $f(x) = \cos(x)e^x$ 9) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

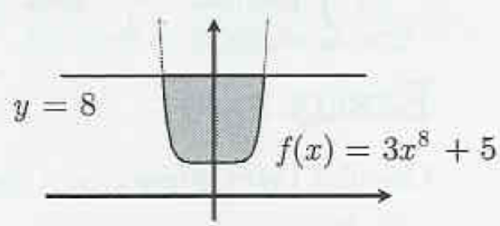
EXERCICE 39

Dans chaque cas, calculer l'aire de la région grisée :

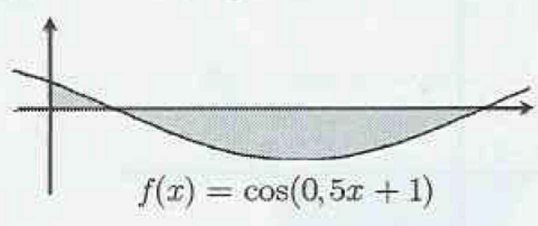
1)



2)



3)



EXERCICE 40

- Trouver une primitives pour chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (2x^2 - 3x + 1)e^x$ $f_2(x) = (x^2 + 4x - 3)e^{-x}$

$f_3(x) = (-5x^2 - 2x + 7)e^{2x}$ $f_4(x) = (3\sin(x) - 7\cos(x))e^{3x}$

- On considère la fonction $f_5(x) = \dfrac{-x^2+4}{(x+1)^2}$. Trouver les valeurs de A, B et $C \in \mathbb{R}$ afin que $f_5(x) = \dfrac{-x^2+4}{(x+1)^2} = A + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$, puis trouver une primitive de $f_5(x)$.

Exercice 41

Calculer, si elles existent, les intégrales suivantes :

$a)\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2}dx =$ $(sol : 2)$

$b)\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}dx =$ $(sol : -\frac{1}{2})$

$c)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^2}dx =$ $(sol : diverge)$

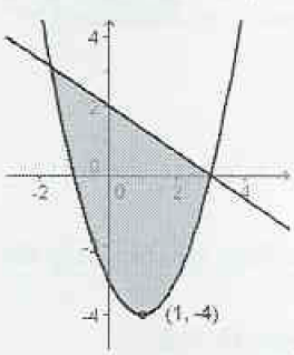
$d)\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx =$ $(sol : 4)$

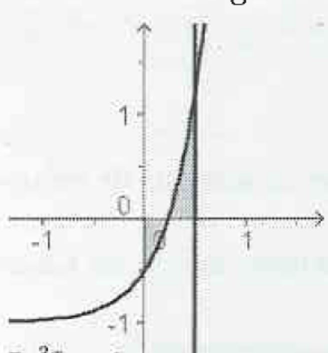
Exercice 42

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations $y = 2^x$, $x + y = 1$ et $x = 1$.

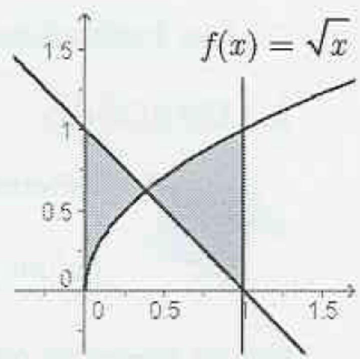
Exercice 43

Dans chaque cas, trouver la valeur de l'aire grisée :





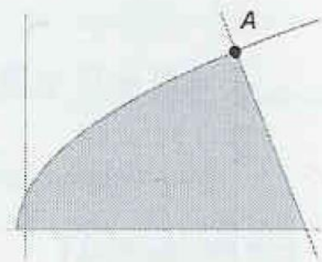
$f(x) = 0{,}5e^{3x} - 1$



EXERCICE 44

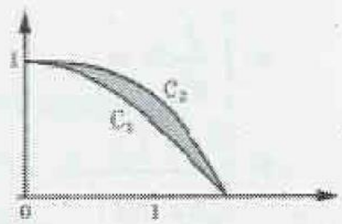
Le schéma ci-contre représente la courbe $y = \sqrt{4x+1}$ ainsi que la normale à la courbe au point A de coordonnées $(6;5)$.

1) Trouver l'équation de cette normale.
2) Calculer l'aire grisée.



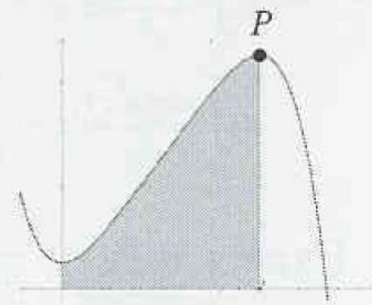
EXERCICE 45

On donne les courbes $C_1 : y = \cos(x)$ et $C_2 : y = ax^3 + 1$. Calculer la valeur du paramètre a puis l'aire du domaine grisé pour avoir la situation dessinée ci-contre.



EXERCICE 46

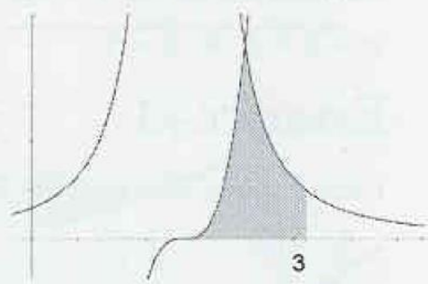
Le schéma ci-contre représente la courbe $y = (1-4x)^5 + 20x$. Montrer que la courbe possède un minimum situé sur l'axe des y puis calculer l'aire grisée.



EXERCICE 47

Le schéma ci-contre représente une partie des courbes $y = (3x-5)^3$ et $y = \dfrac{32}{(3x-5)^2}$.

Calculer l'aire grisée.



EXERCICE 48

Déterminer la hauteur de cette cible rectangulaire de sorte qu'une fléchette lancée au hasard ait la même probabilité de se planter au-dessus qu'au-dessous de la courbe $f(x) = \sin(x) + 2$

EXERCICE 49

Déterminer la valeur moyenne $\overline{f}$ de la fonction f dans l'intervalle I, puis trouver un nombre $c \in I$ tel que $\overline{f} = f(c)$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad I_1 = [1;9]$ $\quad I_2 = [4;9]$

b) $f(x) = \cos(x)$ $\quad I_1 = [0;\pi]$ $\quad I_2 = \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad I = [a;b]$ $\quad$ avec $b > a > 0$

EXERCICE 50 EXERCICE DE BAC 2004

On considère les deux fonctions $f : x \mapsto y = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ et $g : x \mapsto y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

a) Faire l'étude de chacune de ces fonctions et représenter leur graphe dans un même repère orthonormé, après avoir calculé les coordonnées de leurs points d'intersection.

b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) \geq g(x)$?

c) Hachurer la surface fermée délimitée par les deux graphes et calculer son aire.

d) Calculer l'angle formé par les tangentes aux graphes de f et g à l'origine.

e) Soit $P\big(x;f(x)\big)$ un point du graphe de f et $Q\big(x;g(x)\big)$ un point de même abscisse du graphe de g. Appelons $d(x)$ la distance entre ces deux points. Quelle est la valeur maximale de $d(x)$ pour x compris entre 0 et 2 ?

EXERCICE 51 EXERCICE DE BAC 2005

1. On considère la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{x^2}{-x+2}$.

a) Déterminer les points P et Q du graphe de f dont l'ordonnée vaut 1.

b) Faire une étude complète de cette fonction.

c) Le graphe de f , son asymptote oblique et les droites verticales d'équation $x = -2$ et $x = 1$ délimitent une surface fermée. Hachurer cette surface et calculer son aire.

2. On considère encore la fonction $g : x \mapsto y = \ln\big(f(x)\big)$.

d) En tirant parti de l'étude de la fonction f et de la réponse à la question a) , déterminer :

- le domaine de définition de la fonction g ;
- les intersections du graphe de g et de l'axe des abscisses ;
- les asymptotes verticales du graphe de g .

Calculer les images par g de $x = -4$, $x = -3$ et $x = -1$, puis dessiner le graphe de g dans un nouveau repère.

e) Vérifier que $g'(x) = \dfrac{x-4}{x(x-2)}$.

f) Déterminer une équation de la tangente t au graphe de g en son point d'abscisse -2. Représenter finalement t sur le dessin précédent.

EXERCICE 52 EXERCICE DE BAC 2006

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \left(x^2 + bx + b\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, où b est un nombre réel différent de 2 $\left(b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\right)$.

a) Vérifier que le graphe de f passe par le point $A\left(-1;\mathrm{e}\right)$ pour toute valeur de b.

b) Calculer (en fonction de b) la dérivée $f'(x)$ et les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de f.
Pour quelles valeurs de b l'un de ces points est-il situé sur l'axe des abscisses ?

Pour la suite du problème, on pose $b = 4$ donc $f(x) = \left(x^2 + 4x + 4\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

c) Étudier la fonction f, représenter son graphe dans un repère orthonormé, mettre en évidence le point $A\left(-1;\mathrm{e}\right)$.

d) 1. Établir une équation de la tangente au graphe de f en $A\left(-1;\mathrm{e}\right)$.
2. Déterminer le point d'intersection de la tangente et de l'axe des abscisses.
3. Calculer l'angle aigu que forment la tangente et l'axe des abscisses.
4. Dessiner la tangente dans le même repère.

e) On considère la fonction $g : x \mapsto y = -\dfrac{1}{2} f(x)$.
Représenter son graphe dans le même repère.

f) Hachurer la surface fermée délimitée par les graphes de f et de g et les droites verticales d'équation $x = -2$ et $x = 4$.
Calculer l'aire de cette surface.