

Problème

Paul est percussionniste dans un orchestre. La probabilité qu'il joue un morceau complètement est de $\frac{2}{5}$, la probabilité qu'il ne joue un morceau que partiellement est de $\frac{1}{2}$, et il arrive, pour certains morceaux, qu'il ne joue pas du tout.

Calculer la probabilité que, lors des neuf prochains morceaux, Paul joue...

- a) quatre morceaux partiellement.
- b) au moins deux morceaux complets.

L'orchestre décide de jouer les morceaux de son répertoire au hasard, le même morceau pouvant être joué plusieurs fois. Le concert se termine après le premier morceau que Paul ne joue pas du tout. Appelons X le nombre de morceaux joués par l'orchestre.

- c) Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et trouver une formule pour $P(X = n)$.
- d) Quelle est la probabilité que X soit impair ?

Pour la suite du problème, l'orchestre n'interprète que des morceaux que Paul joue.

- e) Quelle est alors la probabilité que Paul joue un morceau...
 - 1) complètement ?
 - 2) partiellement ?

La probabilité que Paul commette une erreur lors d'un morceau est de $\frac{4}{13}$ s'il le joue complètement et de $\frac{2}{13}$ s'il ne le joue que partiellement. Paul ne commet jamais plus d'une erreur par morceau.

- f) A l'aide des résultats trouvés au point e), vérifier que la probabilité que Paul commette une erreur lors d'un morceau est $p = \frac{2}{9}$.
- g) Combien de morceaux au minimum l'orchestre doit-il jouer pour que la probabilité que Paul commette au moins une erreur soit supérieure à 0.989 ?
- h) Un musicien de l'orchestre propose le jeu suivant : si Paul commet une erreur lors d'un morceau, Paul doit payer 14 francs ; sinon, chaque autre membre paie 50 centimes. Sachant que le jeu est équitable, combien de personnes constituent l'orchestre ?