

# LDDR - Niveau 2: TE 1

3Mg06

## Réurrence Analyse combinatoire

30.09.2016

Tous les calculs, présentés avec soin, doivent figurer sur les feuilles de solutions.  
Tous les résultats seront justifiés, soit par calcul, soit par un commentaire.

### Exercice 1

Déterminer (*simplifier au maximum*) le sixième terme du développement de

$$(2 - 3i)^{10}.$$

### Exercice 2

1. Démontrer par récurrence que :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

2. Calculer :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \frac{42}{7 \cdot 9} + \frac{52}{9 \cdot 11} + \dots$$

### Exercice 3

a) Calculer les dérivées successives de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) = (f'(x))' =$$

$$f'''(x) = (f''(x))' =$$

$$f^{IV}(x) = (f'''(x))' =$$

b) Montrer que les résultats trouvés vérifient la formule :

$$(**) \quad f^n(x) = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{(x+3)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$$

c) Prouver par récurrence la formule (\*\*).

**Tourner la feuille !**

#### **Exercice 4**

Pierre et Paul sont des élèves d'une classe mixte de 11 filles et 9 garçons. On se propose de prendre, dans cette classe, 3 garçons pour jouer les rôles respectifs de Tartuffe, Orgon et Cléante, et 2 filles pour jouer les rôles respectifs d'Elmire et de Marianne. Un tel ensemble de 3 garçons et 2 filles, dans lequel le rôle de chacun est bien précisé est appelé une "troupe".

- a) De combien de façons différentes peut-on choisir les 3 garçons en effectuant à chacun d'eux un rôle bien déterminé ?
- b) Même question pour les filles.
- c) En déduire le nombre de troupes que l'on peut former.
- d) Combien y a-t-il de "troupes" qui contiennent Pierre et Paul ?

#### **Exercice 5**

Dans une grille rectangulaire de 5 colonnes et 3 lignes, de combien de façons différentes peut-on placer

- a) 5 jetons rouges, s'il doit y avoir un jeton par colonne ?
- b) 5 jetons de couleurs différentes, un dans chaque colonne ?
- c) 5 jeton rouge ?
- d) 5 jetons de couleurs différentes ?

**Bon travail !**

**Owocnej pracy !**