

LDDR - Niveau 2: TE 1

3Mg06

Récurrance Analyse combinatoire

30.09 2016

Tous les calculs, présentés avec soin, doivent figurer sur les feuilles de solutions.
Tous les résultats seront justifiés, soit par calcul, soit par un commentaire.

Exercice 1

Déterminer (*simplifier au maximum*) le sixième terme du développement de

$$(2 - 3i)^{10}.$$

Exercice 2

1. Démontrer par récurrence que :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

2. Calculer :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \frac{4^2}{7 \cdot 9} + \frac{5^2}{9 \cdot 11} + \dots$$

Exercice 3

a) Calculer les dérivées successives de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) = (f'(x))' =$$

$$f'''(x) = (f''(x))' =$$

$$f^{IV}(x) = (f'''(x))' =$$

b) Montrer que les résultats trouvés vérifient la formule :

$$(**) \quad f^n(x) = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{(x+3)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$$

c) Prouver par récurrence la formule (*).

Tourner la feuille !

Exercice 4

Pierre et Paul sont des élèves d'une classe mixte de 11 filles et 9 garçons. On se propose de prendre, dans cette classe, 3 garçons pour jouer les rôles respectifs de Tartuffe, Orgon et Cléante, et 2 filles pour jouer les rôles respectifs d'Elmire et de Marianne. Un tel ensemble de 3 garçons et 2 filles, dans lequel le rôle de chacun est bien précisé est appelé une "troupe".

- a) De combien de façons différentes peut-on choisir les 3 garçons en effectuant à chacun d'eux un rôle bien déterminé ?
- b) Même question pour les filles.
- c) En déduire le nombre de troupes que l'on peut former.
- d) Combien y a-t-il de "troupes" qui contiennent Pierre et Paul ?

Exercice 5

Dans une grille rectangulaire de 5 colonnes et 3 lignes, de combien de façons différentes peut-on placer

- a) 5 jetons rouges, s'il doit y avoir un jeton par colonne ?
- b) 5 jetons de couleurs différentes, un dans chaque colonne ?
- c) 5 jeton rouge ?
- d) 5 jetons de couleurs différentes ?

Bon travail !

Owocnej pracy !