

LDDR- Niveau 2 : TE 5 Calcul Integral solutions

Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 2

3MG

CALCUL INTÉGRAL

Solutions B

Exercice 1

$$f(x) = \sqrt{6x+9}, f(0) = 3 \Rightarrow T(0;3), f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x+9}} \Rightarrow f'(0) = 1, \text{ la tangente est } t: y = x + 3,$$

la tangente coupe l'axe Ox en $I(-3;0)$ et l'aire du triangle IOT vaut $\frac{9}{2}$

$$\int_{-\frac{3}{2}}^0 (6x+9)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{1}{9} (6x+9)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^0 = 3, \text{ donc l'aire vaut } \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Exercice 2

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2x) - \sin(3x)) dx = \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \cos(3x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 0 - 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$b) \int_1^2 \frac{8}{x^3} dx = \int_1^2 8 \cdot x^{-3} dx = \left(-4 \cdot x^{-2} \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{4}{x^2} \right) \Big|_1^2 = -1 + 4 = 3$$

$$c) \int_1^{\infty} \frac{8}{x^3} dx = \left(-\frac{4}{x^2} \right) \Big|_1^{\infty} = 0 + 4 = 4$$

Exercice 3

$$f(x) = (5x^2 - 4x) \cdot e^{-x}, g(x) = e^{-x}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{10} = \frac{4 \pm 6}{10} \text{ d'où}$$

$$x_1 = -\frac{1}{5} \text{ et } x_2 = 1 \text{ (bornes d'intégration)}$$

$$\text{Aire} = \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx, g(x) - f(x) = (-5x^2 + 4x + 1) \cdot e^{-x} = h(x)$$

$$H(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{-x}, H'(x) = (-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) \cdot e^{-x}$$

$$H'(x) = h(x) \Rightarrow A = 5, 2A - B = 4 \Rightarrow B = 6, B - C = 1 \Rightarrow C = 5, \text{ donc}$$

$$H(x) = (5x^2 + 6x + 5) \cdot e^{-x}$$

$$H(1) = 16 \cdot e^{-1} \approx 5.886, H\left(-\frac{1}{5}\right) = 4 \cdot e^{\frac{1}{5}} \approx 4.886 \text{ et l'aire vaut environ } 1.$$

$$\text{Remarque : } F(x) = (-5x^2 - 6x - 6) \cdot e^{-x} \text{ et } G(x) = -e^{-x}$$