LDDR – Niveau II: Taylor

6. Exercices

Exercice 1

On donne la fonction $f(x)=x^3$.

a) Établir le développement de Taylor d'ordre 2 de f au point $x=1$.

Donner le reste $R_2(x)$ sous la forme intégrale, $R_2(x)=\int_1^x \frac{f^{(3)}(t)}{n!}(x-t)^2\,\mathrm{d}t$, puis calculer cette intégrale.

b) Établir le développement de Taylor d'ordre 3 de f au point $x=-\frac{1}{2}$.

c) Reprendre les deux questions précédentes avec cette fois $f(x)=(2x+1)^3$.

Exercice 2

Établir les développements en série de Taylor d'ordre n des 2 fonctions ci-dessous en $x=0$. Donner chaque fois le reste sous la forme $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ avec $c\in[0;x]$ et donner une majoration de la valeur absolue du reste, c'est-à-dire de l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $P_n(x)$.

a) $f(x)=\cos(x)$ (poser $n=2k$)

b) $f(x)=\mathrm{e}^x$

Exercice 3

On considère la fonction $f(x)=\frac{1}{1-x}$, avec $x<1$. Le développement de Taylor d'ordre n de f au point $x=0$ contient un reste de la forme $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ avec $c\in[0;x]$. En observant que le polynôme de Taylor est une série géométrique, déterminer c en fonction de x.

Exercice 4

Pour chacune des quatre fonctions f données ci-dessous :

a) Trouver l'expression de $f^{(n)}(x)$ et la vérifier par récurrence.

b) Calculer le coefficient $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

c) Établir le développement de Taylor d'ordre n de f au point $x=0$ en explicitant le reste $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

d) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la formule de Taylor est utile, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles $R_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$.

1. $f(x) = \cosh(x)$ (poser $n = 2k$ dans la série de Taylor)
2. $f(x) = x \cdot e^x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
4. $f(x) = \ln(1+x)$

Exercice 5

Donner les trois premiers termes non nuls des développements de Taylor au point $x=0$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

b) $f(x) = \tan(x)$

Exercice 6

En utilisant les deux premiers termes non nuls des développements de Taylor au point $x=0$ du numérateur et du dénominateur, calculer la limite lorsque x tend vers 0 des quotients suivants :

a) $y = \dfrac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{x - \sin(x)}$

b) $y = \dfrac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$