LDDR – Niveau II : Equations Differentielles

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles ci-dessous, dans lesquelles la fonction y n'apparait pas.

a) $y' - x^2 + 2 = 0$ b) $x \cdot y' = x - 1$ c) $y'' = -3x^2 + 2x$

Exercice 2

a) Pour $x \in [0;3]$ et $y \in [0;3]$, dessiner le champ des directions lié à l'équation différentielle $y' = x - y$. On ne prendra que les points à coordonnées entières.

b) En avançant dans le champ de direction, trouver une approximation de la valeur en $x = 3$ de la solution particulière qui passe par l'origine.

c) Montrer que cette solution particulière est $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ et comparer l'approximation avec la valeur exacte.

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

a) $y' = \dfrac{x^2}{y^4}$ b) $x \cdot y' = y$ c) $y' = 2xy$

d) $y' = \dfrac{1-y}{x-2}$ e) $y' = e^{2x-y}$ f) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

Exercice 4

La population p d'une ville croît régulièrement. Si $p(t)$ est le nombre d'habitants au temps t, où t est exprimé en années, on désigne par Δp son accroissement $p(t + \Delta t) - p(t)$ durant un intervalle de temps Δt.

Il est raisonnable de penser que, pour un intervalle de temps assez court, l'accroissement Δp de la population est proportionnel, d'une part, à l'effectif p de cette population et, d'autre part, à la durée d'observation Δt.

On admet donc la relation $\Delta p = k \cdot p \cdot \Delta t$ où k est une constante. Cette égalité peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = k \cdot p$. Lorsque $\Delta t \to 0$, on obtient l'équation différentielle $p'(t) = k \cdot p(t)$ ou, en employant la notation de Leibniz : $\dfrac{dp}{dt} = k \cdot p$.

a) Trouver la solution générale de l'équation différentielle $p'(t) = k \cdot p(t)$, puis déterminer la solution particulière satisfaisant $p(0) = 20000$.
Déterminer finalement la valeur de k, sachant que $p(25) = 30000$.

b) Trouver le taux d'accroissement annuel.

c) En combien de temps la population double-t-elle ?

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

a) $y' + \sin(x) \cdot y = \sin(x)$ b) $xy' - y = 4x^3$ c) $y' + y = x^2$

d) $y' + \cos(x) \cdot y = \sin(x)\cos(x)$ e) $y' + \tan(x) \cdot y = 2x \cdot \cos(x)$

f) $x^2 \cdot y' - y = 1$ g) $x^2 \cdot y' + y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$ h) $y' + 2xy = x^3 + x$

Déterminer, pour la dernière équation, la solution particulière dont le graphe possède un point à tangente horizontale d'abscisse 1, puis calculer l'ordonnée de ce point.

Exercice 6

On donne l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^2 + 4y}{x}$.

a) Trouver la solution générale de cette équation différentielle.

b) On appelle $f(x)$ la solution particulière de l'équation qui respecte la condition initiale $y(2) = 2$. Déterminer f, ses zéros ainsi que ses extremums, puis représenter le graphe de f pour $x \in [-3;3]$.