16. Exercices

Exercice 1

On donne la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

a) Calculer $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x$ et hachurer la surface correspondante.

b) Calculer $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$ et hachurer la surface correspondante.

Exercice 2

Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

d) $f(x) = (x+3)^2$

e) $f(x) = \frac{k}{x}$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

g) $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$

h) $f(x) = \sin(x)$

i) $f(x) = \sin(ax+b)$

j) $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x^3)$

k) $f(x) = \frac{1}{ax+b}$

l) $f(x) = (ax+b)^n$, $n \neq -1$

m) $f(x) = \sqrt{ax+b}$

n) $f(x) = \frac{ax+b}{x}$

o) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

Exercice 3

a) Montrer que $F(x) = \ln(ax)$ et $G(x) = \ln(x)$ sont deux primitives de la même fonction.

b) En déduire que pour $a > 0$ et $x > 0$, on a la relation $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

Exercice 4

a) Montrer que la dérivée de la fonction $F(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot \mathrm{e}^x$ est de la forme $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \cdot \mathrm{e}^x$.

Exprimer a, b et c en fonction de A, B et C.

b) Exprimer A, B et C en fonction de a, b et c puis en déduire une primitive de la fonction $f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \mathrm{e}^x$.

Exercice 5

Trouver une primitive de $f(x) = (2x-5) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ et de $g(x) = \left(-x^2 + 3x - 5\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Exercice 6

Calculer les intégrales ci-dessous et hachurer les surfaces correspondantes.

a) $\int_0^4 x\cdot(4-x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

c) $\int_{-1}^8 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}$

e) $\int_{-2}^2 \cosh(x)\mathrm{d}x$

f) $\int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

g) $\int_0^{2\pi} 3\sin(x)\mathrm{d}x$

h) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

i) $\int_{-5}^5 |x|\,\mathrm{d}x$

Exercice 7

a) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par le graphe de la fonction $f(x)=\sin(2x)$ et l'axe des abscisses, pour $x\in[0;2\pi]$.

b) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par le graphe de la fonction $f(x)=x\cdot(x-2)\cdot(x-5)$ et l'axe des abscisses.

Pour chaque question, représenter le graphe de la fonction dans un repère orthonormé et hachurer la surface dont on demande de calculer l'aire.

Exercice 8

Trouver une primitive des fonctions rationnelles ci-dessous, consulter les tables pour les deux dernières questions.

a) $y=\frac{2x-5}{x+3}$

b) $y=\frac{x^2-4x+3}{2x-5}$

c) $y=\frac{2x^3-5x^2+7x-5}{2x-1}$

d) $y=\frac{1}{x^2}$

e) $y=\frac{1}{(x+2)^2}$

f) $y=\frac{1}{x^2-6x+9}$

g) $y=\frac{1}{(3x+2)^2}$

h) $y=\frac{1}{x^2-4}$

i) $y=\frac{1}{x^2+1}$

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes, puis déterminer leur limite lorsque $b\to+\infty$

a) $\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

b) $\int_0^b x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

c) $\int_0^b x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

d) $\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Remarque :

$\lim\limits_{b\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ peut se noter $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ et s'appelle une intégrale impropre.

Exercice 10

Calculer les intégrales impropres suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

Exercice 11

Discuter la convergence des intégrales ci-dessous en fonction du paramètre réel k.

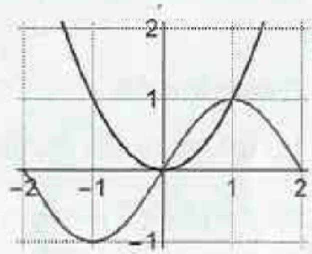
a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^k}$

Exercice 12

On donne la parabole $p : y = x^2 - 4x + 3$ ainsi que $A(1;a)$ et $B(5;b)$ deux points de p. Calculer l'aire de la surface comprise entre l'arc AB et la corde qui l'intercepte.

Exercice 13

Hachurer et calculer l'aire de la surface fermée délimitée par les graphes des fonctions f et g dans les cas ci-dessous.



a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ et $g(x) = x^2 - 8x + 15$

b) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$, $x \in [0;2\pi]$

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $g(x) = x - 2$

d) $f(x) = x^3 - 2x$ et $g(x) = x^2$

e) $f(x) = \sin(ax)$ et $g(x) = x^2$, $a \in [0;2\pi]$ et tel que $f(1) = g(1)$

Exercice 14

Calculer la valeur de m de sorte que l'aire du domaine fermé limité par les graphes des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ et $g(x) = mx$ soit égale à 9. $\left(m = \dfrac{3}{2}\right)$

Exercice 15

La parabole d'équation $y = x^2$ est coupée à angle droit, en ses points d'abscisse $x = -1$ et $x = 1$, par une autre parabole dont le sommet se situe sur l'axe Oy. Calculer l'aire du domaine fermé délimité par ces deux paraboles. $\left(\dfrac{5}{3}\right)$

Exercice 16

Calculer l'aire de la surface fermée, située dans le premier quadrant, délimitée par le graphe de $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, sa tangente au point T d'abscisse 4, et les axes de références.

Exercice 17

Calculer les intégrales ci-dessous en utilisant la méthode d'intégration par changement de variable. Donner chaque fois la primitive en fonction de x.

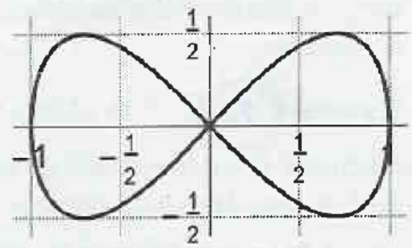
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \tan(x)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cdot\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \sin(\pi x+\pi)\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x$ g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3\mathrm{e}^x}{1+2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ j) $\displaystyle\int_1^{4} \frac{x}{\sqrt{4x+2}}\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ l) $\displaystyle\int_0^{1} x^3\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

Exercice 18

On a représenté ci-contre la courbe d'équation $y^2 = x^2 - x^4$. Calculer l'aire de la surface comprise à l'intérieur de cette courbe. $\left(\frac{4}{3}\right)$



Exercice 19

En intégrant par parties, trouver une primitive des fonctions ci-dessous.

a) $y=(3x+7)\cdot\cos(x)$ e) $y=\dfrac{\ln(x)}{x}$ i) $y=\sin(x)\cdot\mathrm{e}^x$

b) $y=(x-5)\cdot\ln(x)$ f) $y=x\cdot\mathrm{e}^{-x}$ j) $y=\cos(x)\cdot\mathrm{e}^x$

c) $y=\ln(x)=\ln(x)\cdot 1$ g) $y=x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$ k) $y=\cos(x)\cdot\sin(x)$

d) $y=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ h) $y=x^3\cdot\mathrm{e}^{-x}$ l) $y=\dfrac{x+3}{(x+1)^3}$

Exercice 20

Calculer $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ de trois manières différentes. $\left(\frac{8}{3}\right)$

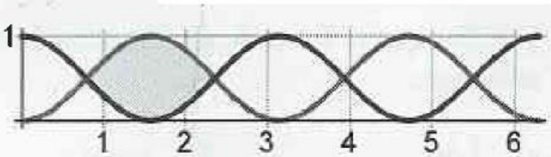
a) En effectuant le changement de variable $x=u-1$

b) En effectuant le changement de variable $x=t^2-1$

c) En effectuant une intégration par parties.

Exercice 21

En intégrant par parties, puis en employant une relation fondamentale de la trigonométrie, trouver une primitive des fonctions $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$.



Calculer ensuite l'aire d'une des surfaces fermées délimitées par les graphes de ces fonctions. (1)

Exercice 22

Calculer $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ puis interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 23

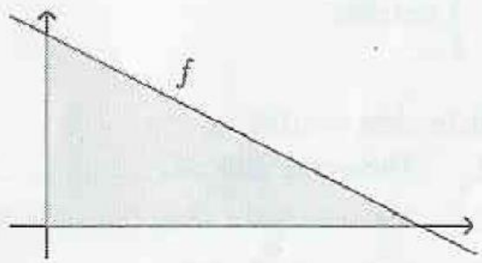
Trouver une primitive des fonctions ci-dessous.

a) $y=\arcsin(x)$ (poser $x=\sin(t)$) b) $y=\arccos(x)$

Exercice 24

a) On donne la fonction $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$.

On fait tourner la surface située dans le premier quadrant et comprise entre le graphe de f et l'axe Ox, autour de cet axe. Calculer le volume engendré par cette rotation.



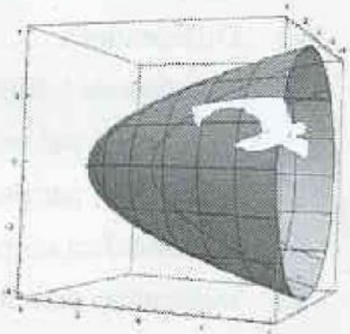
b) Calculer le volume d'un cône de révolution de rayon r et de hauteur h.

Exercice 25

On donne la fonction $f(x)=x^2-x-6$. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface fermée comprise entre le graphe de f et cet axe. $\left(\frac{625\pi}{6}\right)$

Exercice 26

Calculer le volume du paraboloïde engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la parabole d'équation $y=\sqrt{x}$ pour $x\in[0;4]$. (8π)



Exercice 27

Vérifier que la formule de Simpson donne la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

a) $\int_a^b \mathrm{d}x$ b) $\int_a^b x\mathrm{d}x$ c) $\int_a^b x^2\mathrm{d}x$ d) $\int_a^b x^3\mathrm{d}x$

En déduire que la formule de Simpson donne la valeur exacte de $\int_a^b P(x)\mathrm{d}x$ pour tout polynôme $P(x)$ de degré plus petit ou égal à 3.

Exercice 28

Calculer la valeur exacte et l'estimation de Simpson de chacune des intégrales suivantes, puis, donner l'erreur relative de l'estimation de Simpson par rapport à la valeur exacte.

Pour l'estimation de Simpson, faire le calcul d'abord avec l'intervalle initial, puis en divisant cet intervalle en deux sous-intervalles de même longueur.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{4\mathrm{d}x}{x^2+1}$