

LDDR-Niveau II:Algre Lineaire Solutions

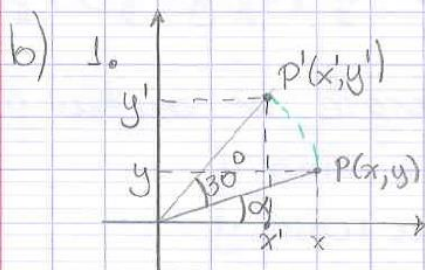
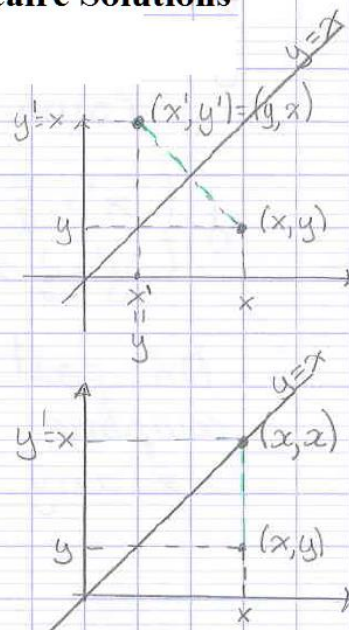
EXERCICE 1.

a) 1. $f: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Symétrie par rapport à l'axe $y=x$.

2. $f: \begin{cases} x' = x \\ y' = x \end{cases}$

projection verticale sur la droite $y=x$.



On va utiliser des coordonnées polaires $(r; \alpha)$

où $r = \|\vec{OP}\|$ et $\alpha = \widehat{POx}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

En ces coordonnées $P(x, y) \rightsquigarrow P(r, \alpha)$ et $P'(x', y') \rightsquigarrow P'(r, \alpha + 30)$

On cherche x' et y' en fonction de x et y

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha + 30) = r(\cos \alpha \cos 30 - \sin \alpha \sin 30) = \\ &= r\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{r \cos \alpha}_x - \frac{1}{2} \underbrace{r \sin \alpha}_y = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y \end{aligned}$$

$$y' = r \sin(\alpha + 30) = r (\sin \alpha \cos 30 + \sin 30 \cos \alpha) = \\ = r \sin \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} + r \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{1}{2} x$$

$$f: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y \\ y' = \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \end{cases}$$

Ou

On peut utiliser la notation d'analyse complexe.

$$z = x + iy \rightarrow \text{cis}(30) (x + iy) = (\cos 30 + i \sin 30) (x + iy) \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} x i + i \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} y = \\ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y \right) + \left(\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) i$$

$$\text{Donc } (x; y) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y; \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right)$$

Exercice 2.

Rotation d'angle α autour d'origine:

$$f: \begin{cases} x' = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y \\ y' = \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{cases}$$

Et donc la matrice d'application:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

2. En utilisant l'analyse complexe: $z = x + yi$

$$z \rightarrow z \cdot \text{cis } 90^\circ = (x + yi) (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = \\ = (x + yi) i = -y + xi$$

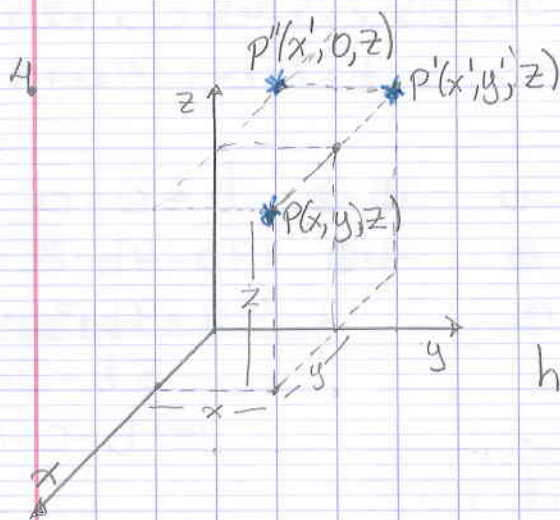
Donc

$$f: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = iz \end{cases}$$

En général: Rotation d'angle α autour de l'axe Oz .

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $f: \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = z \end{cases}$



$$f: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \rightarrow g: \begin{cases} x'' = -x \\ y'' = 0 \\ z'' = z \end{cases}$$

$$h = g \circ f: \begin{cases} x'' = -x \\ y'' = 0 \\ z'' = z \end{cases}$$

EXERCICE 3.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \kappa \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa a \\ b \end{pmatrix}$$

L'ensemble n'est pas un espace vectoriel car il ne forme pas un groupe commutatif.

En particulier:

Soit $x, y \in K$ et $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$(x+y)\vec{a} = (x+y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + ya \\ b \end{pmatrix}$$

$$x\vec{a} + y\vec{a} = x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ya \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + ya \\ 2b \end{pmatrix}$$

Donc $\underline{(x+y)\vec{a} \neq x\vec{a} + y\vec{a}}$

EXERCICE 4.

a) $P_2 = \{ P(x) : \deg P(x) \leq 2 : ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$$B = \{1, x, x^2\}$$

b) $p_1 = x^2 + x + 4, p_2 = 2x^2 + x + 9, p_3 = x^2 + 2x + 3$

Soit $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

Alors $a(x^2 + x + 4) + b(2x^2 + x + 9) + c(x^2 + 2x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (a + 2b + c)x^2 + (a + b + 2c)x + (4a + 9b + 3c) = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 & (1) \\ a + b + 2c = 0 & (2) \\ 4a + 9b + 3c = 0 & (3) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) - (2): b = c = 0 \\ -4 \times (2) \quad -4a - 4b - 8c = 0 \\ \quad + 4a + 9b + 3c = 0 \\ \hline 5b - 5c = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b - c = 0 \end{array}$$

En remplaçant on a :

$$\begin{cases} (1) \quad a + 3b = 0 \\ (2) \quad a + 3b = 0 \\ (3) \quad 4a + 12c = 0 \Leftrightarrow a + 3c = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \underline{a = -3c}$$

Comme il existe des solutions du système différentes de zéro les polynômes p_1, p_2, p_3 sont linéairement dépendants et alors ils ne forment pas une base de P_2 .

c) Soit l'ensemble $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{a}, \vec{b} \in p$ càd que

$$\exists a, b, \gamma \in \mathbb{R} : \vec{a} = a p_1 + b p_2 + \gamma p_3$$

$$\exists a', b', \gamma' \in \mathbb{R} : \vec{b} = a' p_1 + b' p_2 + \gamma' p_3$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x\alpha p_1 + x\beta p_2 + x\gamma p_3 + y\alpha' p_1 + y\beta' p_2 + y\gamma' p_3 = \\ = (x\alpha + y\alpha')p_1 + (x\beta + y\beta')p_2 + (x\gamma + y\gamma')p_3 \in \mathcal{P}$$

car $x\alpha + y\alpha', x\beta + y\beta', x\gamma + y\gamma' \in \mathbb{R}$.

Alors l'ensemble $\{p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3\}$ forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$.

► On cherche une base de $\mathcal{P}$.

Comme on a vu en (b) les polynômes p_1, p_2, p_3 sont lin. dep.

On examine si les p_1, p_2 sont lin. ind.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a p_1 + b p_2 = 0$ ou

$$a(x^2 + x + 4) + b(2x^2 + x + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b)x^2 + (a + b)x + 4a + 9b = 0.$$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 & \textcircled{1} \\ a + b = 0 & \textcircled{2} \\ 4a + 9b = 0 & \textcircled{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} - \textcircled{2}: b = 0. \Rightarrow a = 0. \\ \text{Comme la seule solution} \\ \text{est } a = b = 0, p_1, p_2 \text{ sont} \\ \text{lin. ind.} \Rightarrow \text{ils forment une} \\ \text{base de } \mathcal{P}. \end{array}$$

$$\mathcal{B} = \{p_1, p_2\}.$$

Exercice 5

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a) trivial

$$b) \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Il suffit de prouver que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont lin. indépendantes.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Donc ils forment une base de M_{22} .

$$c) \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = V$$

Soit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in V$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & 0 \\ 0 & xa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} yb & 0 \\ 0 & yb \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} xa+yb & 0 \\ 0 & xa+yb \end{pmatrix} \in V \Rightarrow V \text{ est un sous}$$

espace-vectriel de M_{22} .

Une base est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Non car il y a d'éléments de M_{22} pour lesquels il n'existe pas l'élément inverse.

Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ($\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$)

EXERCICE 6

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 &= 4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 &= 10\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3\end{aligned}$$

a) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$: $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{0}$.

Alors: $x(\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + y(4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + z(10\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x + 4y + 10z)\vec{u}_1 + (\frac{1}{2}x - 2y - 5z)\vec{u}_2 + (2x + y - 2z)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

Mais comme $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ forment une base c'est à dire qu'ils sont lin. ind. on a:

$$\begin{cases} x + 4y + 10z = 0 & \textcircled{1} \\ \frac{1}{2}x - 2y - 5z = 0 & \textcircled{2} \\ 2x + y - 2z = 0 & \textcircled{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad x + 4y + 10z = 0 \\ 2 \cdot \textcircled{2}: x - 4y - 10z = 0 \quad (-) \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

$$\textcircled{1} \cdot 2 \quad 2x + 8y + 20z = 0$$

$$- \textcircled{3} \quad 2x + y - 2z = 0$$

$$7y + 18z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{18}{7}z$$

En remplaçant en $\textcircled{1}$

$$x - 2\left(-\frac{18}{7}z\right) + 10z = 0 \Leftrightarrow x = \left(-\frac{36}{7} - 10\right)z \Leftrightarrow x = -\frac{106}{7}z$$

Alors il y a d'autres solutions du système différentes de zéro: $(-\frac{106}{7}k, -\frac{18}{7}k, k)$ $k \in \mathbb{R}$. et les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ne sont pas lin. ind.

Ou.

On trouve la valeur de la déterminant:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 10 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 - 5) - \frac{1}{2}(-8 - 10) + 2(20 + 20) = -1 + 9 + 80 = 88 \neq 0$$

On conclut que les vecteurs sont lin. dep.

b) les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont linéairement dépendants donc l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs est de dimension ≤ 2 .

On va prouver que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont linéairement dépendants.

Soit $x, y \in \mathbb{R} : x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{0}$. Alors

$$x(-\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) + y(4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x + 4y)\vec{u}_1 + (\frac{1}{2}x - 2y)\vec{u}_2 + (2x + y)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = 4y \\ \frac{1}{2}x - 2y = 0 & 2y - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 & 8y + y = 0 \Leftrightarrow 9y = 0 \Leftrightarrow y = 0 = x \end{cases}$$

Donc $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont linéairement indépendants et alors ils forment une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Exercice 7.

a) $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6 + 2) - (3 + 1) + 2(2 - 2) =$$

$$= 8 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ sont lin indep}$$

$\Rightarrow$ ils forment une base de V_3 dont la dimension est 3.

b) $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (8 - 15) - (4 - 6) + 5(5 - 4) = -7 + 2 + 5 = 0$$

Donc ils sont lin. dépendants.

On regarde les sous-déterminants (2×2) On observe qu'elles sont différentes de zéro

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0 \text{ Alors la dimension de}$$

sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ est 2.

Ou

On peut directement prouver que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont lin. ind $\Rightarrow$ ils forment une base de ce sous-espace vectoriel

$$c) \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ils sont lin. d'p}$$

En outre toutes les déterminantes 2×2 sont nulles $\Rightarrow$ la dimension est 1.

$$d) \text{ Soit } x, y \in \mathbb{R}: x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{0} \text{ d'où:}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

On conclut que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont lin. ind $\Rightarrow$ la dimension de sous-espace vectoriel est 2.

e) De même manière on prouve que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont lin. ind $\Rightarrow$ ils forment un sous-espace de dimension 2.

Soit $W_1 = \{a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2; a, b \in \mathbb{R}\}$ le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W_2 = \{a\vec{v}_1' + b\vec{v}_2'; a, b \in \mathbb{R}\}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$B_{W_1} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ et $B_{W_2} = \{\vec{v}_1', \vec{v}_2'\}$. Pour prouver que

$W_1 = W_2$ ça suffit de montrer que

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W_2 \text{ et } \vec{v}_1', \vec{v}_2' \in W_1$$

$$\vec{v}_1 = x \vec{v}_1' + y \vec{v}_2' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4x & \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \\ 0 = 6x + 2y & \Leftrightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} = y \end{cases} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$1 = 7x + y \quad ; \quad 1 = 7 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark \quad y = -\frac{3}{4}$$

De même on montre que $\vec{v}_2 \in W_2$ etc.

Donc $W_1 = W_2$.

Ou dim $W_1 = 2 \Rightarrow$ ils forment un plan vectoriel.

$$\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_1$$

$$\vec{n}_2 = \vec{v}_1' \times \vec{v}_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_2$$

Donc ils forment le même plan vectoriel.

$\Rightarrow W_1 = W_2$.

► On cherche une base orthonormée de $W_1 = W_2 = W$.

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \text{On choisit le vecteur } \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme un vecteur de la base orthonormée.

On cherche un vecteur $\perp \vec{v}_1$. Un tel vecteur est le produit vectoriel $\vec{v}_1 \times \vec{n}_1$

$$\vec{v}_1 \times \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Donc le deuxième vecteur est $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Base de } W = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f) W' = \{a \vec{v}_1''; a \in \mathbb{R}\}, \vec{v}_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \dim W' = 1$$

Il suffit de prouver que $\vec{v}_1'' \in W$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - 2y & (1) \\ 2 = 4y & \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \\ 2 = x \end{cases}$$

$$(1) : 1 = 2 - 1 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow W' \text{ sev de } W.$$

EXERCICES a) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} \in V_2$

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Soit } \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2$$

$$f(\lambda \vec{a}) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ -\lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \lambda f(\vec{a})$$

Donc f est linéaire

$$b) \text{ Soit } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_2,$$

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 + x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 + x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 + x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Comme $f(\vec{a} + \vec{b}) \neq f(\vec{a}) + f(\vec{b})$, f n'est pas linéaire.

EXERCICE 9

" $\Rightarrow$ On suppose que f est linéaire. Alors pour $\vec{a}, \vec{b} \in V$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x\vec{a} + y\vec{b}) = f(x\vec{a}) + f(y\vec{b}) = x f(\vec{a}) + y f(\vec{b}).$$

" $\Leftarrow$ Si $f(x\vec{a} + y\vec{b}) = x f(\vec{a}) + y f(\vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, x, y \in \mathbb{R}$

Pour $x = y = 1$, on a: $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ 1^{ère} propriété!

Pour $y = 0$ on a: $f(x\vec{a}) = x f(\vec{a})$ 2^{ème} propriété!

Alors f est linéaire.

EXERCICE 10

a) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\bullet f(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= f(x_1) + f(x_2)$$

• Soit $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 2\lambda x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \lambda f(x)$$

Donc f : linéaire.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V_3, k, \lambda \in \mathbb{R}$

$$k\vec{a} + \lambda\vec{b} = \begin{pmatrix} kx_1 + \lambda x_2 \\ ky_1 + \lambda y_2 \\ kz_1 + \lambda z_2 \end{pmatrix}$$

$$f(k\vec{a} + \lambda\vec{b}) = \begin{pmatrix} kx_1 + \lambda x_2 \\ k(y_1 + z_1) + \lambda(y_2 + z_2) \end{pmatrix}$$

$$kf(\vec{a}) + \lambda f(\vec{b}) = k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 + \lambda x_2 \\ k(y_1 + z_1) + \lambda(y_2 + z_2) \end{pmatrix}$$

Comme $f(k\vec{a} + \lambda\vec{b}) = kf(\vec{a}) + \lambda f(\vec{b})$ f est linéaire

c) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_2, m, n \in \mathbb{R}$

$$m\vec{a} + n\vec{b} = m \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx_1 + nx_2 \\ my_1 + ny_2 \end{pmatrix}$$

$$f(m\vec{a} + n\vec{b}) = m(x_1 + y_1) + n(x_2 + y_2)$$

$$mf(\vec{a}) = m(x_1 + y_1) \quad nf(\vec{b}) = n(x_2 + y_2)$$

$$mf(\vec{a}) + nf(\vec{b}) = m(x_1 + y_1) + n(x_2 + y_2)$$

Donc f linéaire

d) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{R}$

$$f(mx+ny) = \begin{pmatrix} mx+ny \\ (mx+ny)^2 \end{pmatrix}$$

$$mf(x) + nf(y) = m \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} y \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+ny \\ mx^2+ny^2 \end{pmatrix}$$

Comme $(mx+ny)^2 \neq mx^2+ny^2$ f n'est pas linéaire.

EXERCICE 11

a) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f non linéaire

b) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_2$

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda \vec{a}) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f(\vec{a})$$

Donc f : linéaire

f est une projection sur l'axe Ox .

c) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ non linéaire

d) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_2$

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$

Soit $k \in \mathbb{R}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2$

$$f(k\vec{a}) = \begin{pmatrix} ky \\ kx \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = kf(\vec{a})$$

$\Rightarrow f$ linéaire

C'est une symétrie par rapport à l'axe $y=x$

e) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_2$

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$

Soit $\kappa \in \mathbb{R}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$f(\kappa \vec{a}) = \begin{pmatrix} \kappa x \\ \kappa x \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \kappa f(\vec{a})$$

Donc f linéaire : c'est une projection
verticale sur la droite $y=x$

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_2$

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = f(\vec{a} + \vec{b})$$

f n'est pas linéaire

Exercice 12

a) $\mathbb{R} \rightarrow V_2$ $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$

• $\text{Ker} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0\}$. $\dim \text{Ker} f = 0$

• $\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. $\dim \text{Im} f = 1$.

Base $\text{Ker} f = \{\emptyset\}$ Base $\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

b) $f: V_3 \rightarrow V_2$ $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix}$

• $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_3 : f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_3 : x=0 \text{ et } y+z=0 \right\}$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$. $\dim \text{Ker} f = 1$.
 Base = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

• $\dim \text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V_2 : \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_3 : f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=a \\ y+z=b \end{matrix}$

Comme $\forall b \in \mathbb{R} \exists y, z \in \mathbb{R} : y+z=b$.

$\text{Im} f = V_2$: $\dim V_2 = \dim \text{Im} f = 2$ Base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

c) $V_2 \rightarrow \mathbb{R}: f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y$

• $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2 : f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 = x + y \Leftrightarrow x = -y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Dim Ker} f = 1$ Base = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

• $\text{Im} f = \mathbb{R}$ $\text{Dim Im} f = 1$ Base = $\{1\}$

d)

11 b) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2 : f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$ $\text{Dim Ker} f = 1$; Base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• $\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2 : \right\}$ $\text{Dim Im} f = 1$ Base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

• $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\text{Dim Ker} f = 0$ Base $\{\emptyset\}$

• $\text{Im} f = V_2$ $\text{Dim Im} f = 2$ Base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

c) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

• $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$

$\text{Dim Ker} f = 1$ Base = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• $\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$\text{Dim Im} f = 1$ Base = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

EXERCISE 13

$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix} \quad V_2 \rightarrow V_2$

a) lineaire

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$f(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) \end{pmatrix}$

$f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) \end{pmatrix}$

Soit $k \in \mathbb{R}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f(k\vec{a}) = \begin{pmatrix} kx + 2ky \\ kx - ky \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix} = k f(\vec{a})$

• bijective: $\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2 : f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow f \text{ bijective}$

b) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) Soit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} 3y=1 \Leftrightarrow y=1/3 \text{ et } x=1/3 \\ \vec{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3y=-1 \Leftrightarrow y=-1/3 \end{array}$$

$$x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 14

a) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Symétrie d'axe Ox:

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Symétrie d'axe Oy:

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Symétrie centrale

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Symétrie d'axe $y=x$

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) (cf ex. 1 b.1)

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

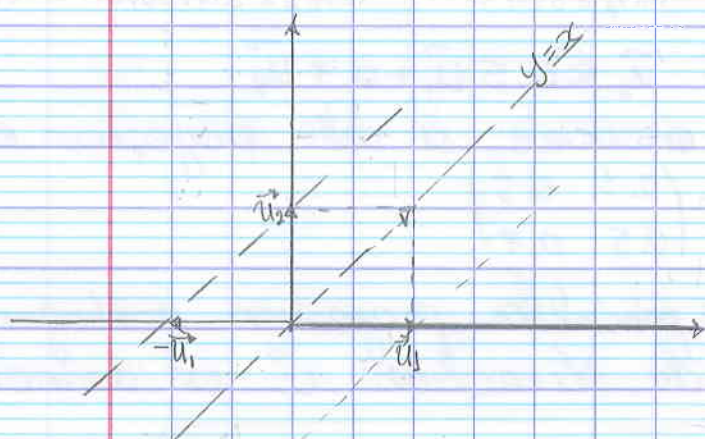
f) Projection orthogonale sur l'axe Ox

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale sur l'axe Oy

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

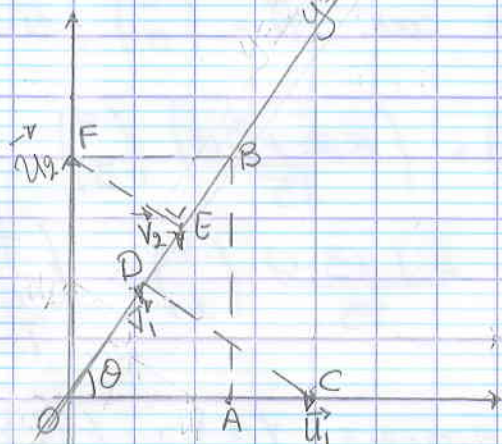
g) Projection sur l'axe Ox de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$



$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h) Projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ ou sur l'axe $y = \frac{3}{2}x$



$\vec{V}_1$ est la projection orthogonale de $\vec{u}_1$ sur la droite;
 $\vec{V}_2$ est la projection orthogonale de $\vec{u}_2$ sur la droite

Dans le triangle OAB on a $\tan \theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 56,31^\circ$

Dans le triangle rectangle OCD:

$$\cos \theta = \frac{\|\vec{V}_1\|}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{\|\vec{V}_1\|}{1} \Rightarrow \|\vec{V}_1\| = \cos 56,31^\circ \Rightarrow \|\vec{V}_1\| = 0,555$$

les composants de $\vec{V}_1$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$$\text{sont alors } \begin{pmatrix} \|\vec{V}_1\| \cos \theta \\ \|\vec{V}_1\| \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,555 \cos 56,31^\circ \\ 0,555 \sin 56,31^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,31 \\ 0,46 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a ainsi } \vec{V}_1 = f(\vec{u}_1) \approx 0,3 \vec{u}_1 + 0,5 \vec{u}_2$$

Dans le triangle rectangle OEF on a :

$$\cos(90-\theta) = \frac{\|\vec{v}_2\|}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{\|\vec{v}_2\|}{1} \Leftrightarrow \|\vec{v}_2\| = \cos(90-56.31^\circ) \Rightarrow \|\vec{v}_2\| = 0.832$$

Les composantes de $\vec{v}_2$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sont alors $\begin{pmatrix} \|\vec{v}_2\| \cos \theta \\ \|\vec{v}_2\| \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.832 \cos 56.31^\circ \\ 0.832 \sin 56.31^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.69 \end{pmatrix}$

On a aussi $\vec{v}_2 \approx 0.5\vec{u}_1 + 0.7\vec{u}_2$

La matrice associée à cette projection est ainsi $M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$

En général Dans le cas général la projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{u}$ est donnée par :

$$\text{proj}_{\vec{u}}(x, y) = \left(\frac{(x, y) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \cdot \vec{u}$$

Dans notre cas : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = 13$

$$\text{proj}_{\vec{u}}(x, y) = \left(\frac{2x + 3y}{13} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}}(1, 0) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}}(0, 1) = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Alors $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$

i) Symétrie d'axe de direction $\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $y = \frac{3}{2}x$

$$\tan \theta = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \theta = 56.3^\circ$$

Dans le triangle rectangle OAB:

$$\cos(180 - 2\theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{1} \Rightarrow$$

$$OA = -\cos 2\theta = -\cos 112.62^\circ$$

$$\Rightarrow OA = 0.385$$

$$\sin(180 - 2\theta) = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sin 2\theta = \sin 112.62^\circ \Rightarrow$$

$$AB = 0.923$$

Alors les coordonnées de $\vec{e}_1' = f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -0.385 \\ 0.923 \end{pmatrix}$

Dans le triangle rectangle ODC:

$$\varphi = 90 - 2(90 - \theta) = 90 - 180 + 2\theta = -90 + 2\theta = -90 + 112.62 = 22.62^\circ$$

$$\cos \varphi = \frac{OC}{OD} = \frac{OC}{1} \Rightarrow OC = 0.923$$

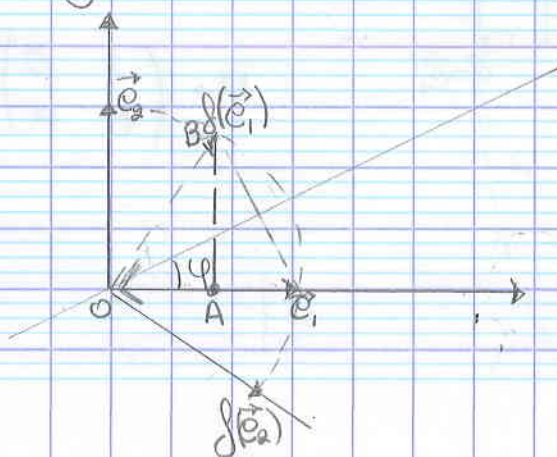
$$\sin \varphi = \frac{DC}{OD} = \frac{DC}{1} \Rightarrow DC = 0.385$$

Alors les coordonnées de $\vec{e}_2' = f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0.923 \\ 0.385 \end{pmatrix}$

On conclut que la matrice est:

$$M = \begin{pmatrix} -0.385 & 0.923 \\ 0.923 & 0.385 \end{pmatrix}$$

En Général Symétrie axiale orthogonale



$$\text{Triangle OAB: } \cos 2\varphi = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \cos 2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sin 2\varphi$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

On obtient l'image du second vecteur de la base par rotation d'angle -90° du vecteur $f(\vec{e}_1)$. Ainsi.

$$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\varphi \\ -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

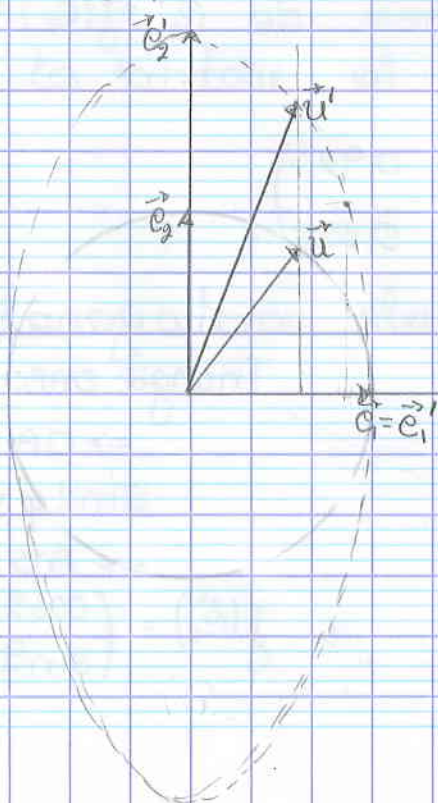
La matrice associée à la symétrie axiale considérée est donc :

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

- j) Affinité axiale d'axe Ox , de direction $\vec{u}_2$ de rapport -2 .

Définition. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique (e_1, e_2) en $(e_1, k e_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est l'affinité axiale d'axe Ox de direction Oy et de paramètre k . La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}^*$$



$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

$$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = k \vec{e}_2$$

Donc la matrice est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

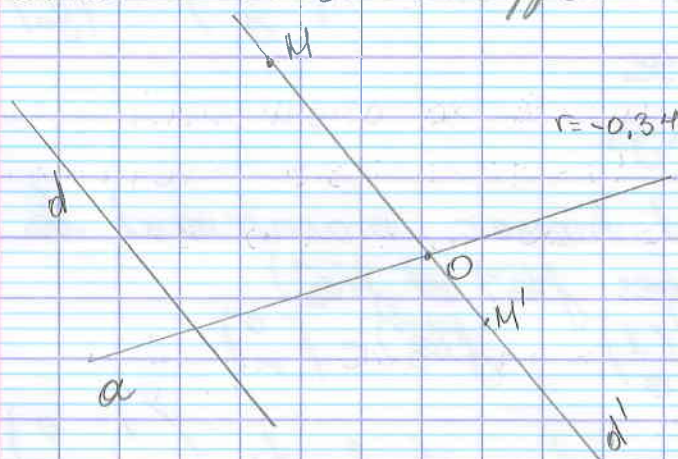
Dans notre cas $k = -2$. Alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

*) Affinité axiale d'axe Ox , de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ de rapport 2.

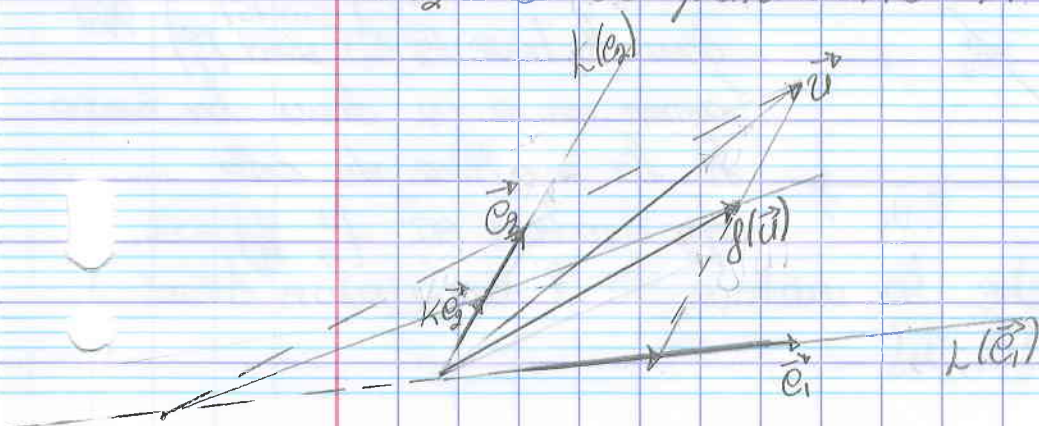
Définition

Soient deux droites a et d , un nombre r et un point M ; Construire la parallèle d' par M à d , le point O intersection de d' et de a , puis le point M' homothétique de M dans l'homothétie de centre O et de rapport r .

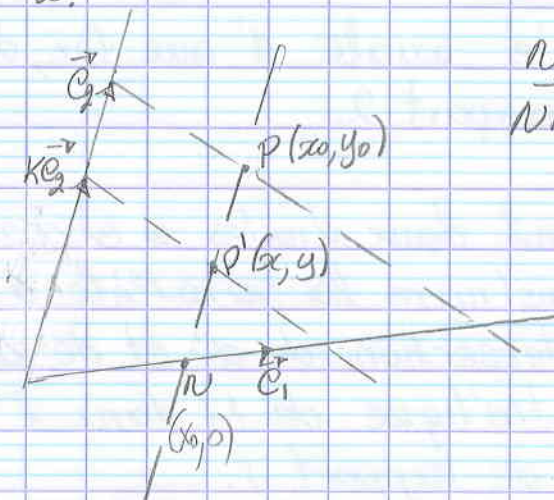
L'application du plan dans lui-même qui associe M à M' est une affinité d'axe a , de direction d et de rapport r .



► L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui transforme une base $B = (e_1, e_2)$ en $(e_1, k e_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est l'affinité axiale d'axe $L(e_1)$, de direction $L(e_2)$ et de paramètre k .



On cherche la matrice de f relativement à la base B .



$$N(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$N(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Soit $P(x_0, y_0)$. On cherche l'image de ce point: les coordonnées du point P' .

$$\text{On a : } N(P') = k \cdot N(P) \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

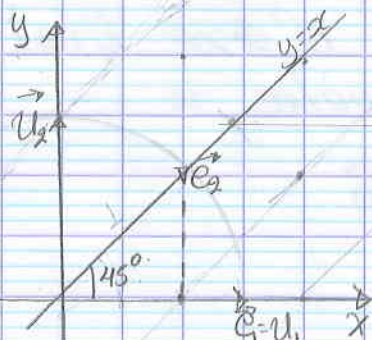
$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = k y_0 \end{cases}$$

On peut trouver maintenant les composantes des images $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$.

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de f est: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

► Dans notre cas: $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$



Les coordonnées de $\vec{e}_2$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sont $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Comme on a vu dans la base B la matrice de cette application est: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $k=2$.

On cherche la matrice de l'application dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

la matrice de changement de la base est $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
 avec $P^{-1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Alors la matrice associée à la transformation dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICES a) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Projection sur le mur.

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} : \text{l'axe } Ox$$

$$\text{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}; y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ le plan } yz \text{ (mur)}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ Symétrie par rapport au plan xy (sol)

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ Projection verticale sur la droite.

$$d: \begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = a \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}; y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{plan } yz \text{ (mur)}$$

$$\text{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} \text{ la droite } d.$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$: Projection verticale sur le plan $z=x$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{l'axe } Oz$$

$$\text{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ le plan } z=x$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

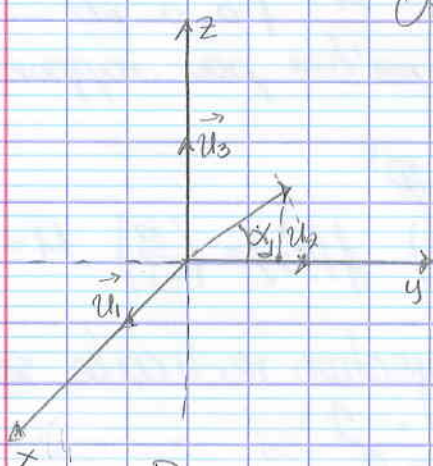
Exercice 16.

a) Symétrie planaire de plan $x=y$

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$$

$$\text{Alors la matrice associée est } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Rotation de 120° autour de l'axe de direction $\vec{u}_1$



On suppose rotation d'angle α

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Donc la matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha = 120^\circ$:

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

$f(\vec{e}_1)$ est donné par le vecteur $\vec{OP}$ où P est l'intersection de π et d , où π est le plan perpendiculaire à $\vec{d}$ et passant par $(1; 0; 0)$ et d est la droite parallèle à $\vec{d}$ et passant par l'origine.

Comme $\pi \perp \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\pi: x+y+z+d=0$. Avec le point $(1; 0; 0)$, on obtient $1+0+0+d=0 \Rightarrow d=-1$

Donc l'équation de π est $x+y+z-1=0$.

Comme $d \parallel \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d passe par l'origine, les équations de d sont $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

L'intersection de π et d est donnée par $2+2+2-1=0 \Rightarrow 3\lambda=1 \Rightarrow \lambda=1/3$. Par conséquent $P(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

et $f(\vec{e}_1) = \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Similairement, on a $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

La matrice de la transformation est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En général La projection sur une droite passant par O .

On considère un vecteur $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ directeur de la droite. Pour tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w}$$

Dans notre cas: $\vec{w} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\cdot \vec{v} = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_1) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \vec{v} = \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_2) = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \vec{v} = \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

d) Projection verticale sur le plan $x+y+z=0$
 La projection est parallèle à la droite Oz dont le vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour trouver les images de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on va trouver les projections des extrémités des 3 vecteurs unités sur le plan.

Pour le $\vec{e}_1$ on a le point $P_1(1;0;0)$ et la droite verticale qui passe par ce point est $d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

L'intersection de d_1 et du plan est $z=1$

donnée par $1+0-t=0 \Leftrightarrow t=1$ L'image de $P_1(1;0;0)$ est donc $P_1'(1;0;1)$. Alors $f(\vec{e}_1) = \vec{OP}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'extrémité de $\vec{e}_2$ est $P_2(0;1;0)$. La droite verticale d_2 passant par P_2 est $d_2: \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$

L'intersection de d_2 et du plan est $z=1$.

donnée par $0+1-t=0 \Rightarrow t=1$ L'image de $P_2(0;1;0)$ est donc $P_2'(0;1;1)$ Ainsi l'image de $\vec{e}_2$ est $\vec{OP}_2' = f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même: $f(\vec{e}_3) = \vec{OP}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par conséquence

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Projection orthogonale sur le plan $x+y-z=0$

La projection P' d'un point $P(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan $x+y-z=0$ est l'intersection du plan et de la droite perpendiculaire au plan et passant par P . Un vecteur perpendiculaire au plan est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est donc un vecteur directeur de la droite perpendiculaire passant par P . Les équations de cette droite sont donc:
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + \lambda \\ z = z_0 - \lambda \end{cases}$$

L'intersection P' de cette droite avec le plan $x+y-z=0$ est donnée par $\lambda + x_0 + \lambda + y_0 - (\lambda + z_0) = 0$
 $\Rightarrow 3\lambda + x_0 + y_0 - z_0 = 0 \Rightarrow 3\lambda = -x_0 - y_0 + z_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3}$ Avec ce λ on a:

$$x = \lambda + x_0 = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3} + x_0 = \frac{2x_0 - y_0 + z_0}{3},$$

$$y = \lambda + y_0 = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3} + y_0 = \frac{-x_0 + 2y_0 + z_0}{3} \text{ et}$$

$$z = -\lambda + z_0 = -\frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3} + z_0 = \frac{x_0 + y_0 - z_0 + 3z_0}{3} = \frac{x_0 + y_0 + 2z_0}{3}$$

On a ainsi $P' \left(\frac{2x_0 - y_0 + z_0}{3}, \frac{-x_0 + 2y_0 + z_0}{3}, \frac{x_0 + y_0 + 2z_0}{3} \right)$

Si $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, on a $P'(0; 0; 0)$.

Par conséquent, l'image de $\vec{OP}$ est

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} (2x_0 - y_0 + z_0)/3 \\ (-x_0 + 2y_0 + z_0)/3 \\ (x_0 + y_0 + 2z_0)/3 \end{pmatrix}$$

Avec $\vec{OP} = \vec{e}_1$, on a $x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$ Ainsi $\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

L'image de $\vec{e}_1$ est donc

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Avec $\vec{OP} = \vec{e}_2$ on obtient: $f(\vec{e}_2) = \vec{OP'} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

et si $\vec{OP} = \vec{e}_3$: $f(\vec{e}_3) = \vec{OP'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

La matrice de la transformation est alors

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Général

La projection sur un plan passant par O et engendré par deux vecteurs orthogonaux.

On considère un plan P passant par O et engendré par deux vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$.
Pour tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a:

$$\text{proj}_P(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{w}_1}(\vec{v}) + \text{proj}_{\vec{w}_2}(\vec{v})$$

Dans notre cas on peut prendre $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors:

$$\text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}_{\vec{w}_2} \vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|^2} \vec{w}_2 = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}_P(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

De même $\text{proj}_P(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\text{proj}_P(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Et donc on obtient la matrice M

g) Symétrie planaire de plan $x+y-z=0$

D'après g, on a trouvé que la projection orthogonale sur le plan $x+y-z=0$ d'un point $P(x_0, y_0, z_0)$ est $P'(\frac{2x_0-y_0+z_0}{3}, \frac{-x_0+2y_0+z_0}{3}, \frac{x_0+y_0+2z_0}{3})$.

le symétrique P'' de P par rapport au plan $x+y-z=0$ sera alors donné par:

$$\begin{aligned}\vec{OP}'' &= \vec{OP} + \vec{PP}'' = \vec{OP} + 2\vec{PP}' = \vec{OP} + 2(\vec{OP}' - \vec{OP}) = \vec{OP} + 2\vec{OP}' - 2\vec{OP} = \\ &= 2\vec{OP}' - \vec{OP} = 2 \begin{pmatrix} \frac{2x_0-y_0+z_0}{3} \\ \frac{-x_0+2y_0+z_0}{3} \\ \frac{x_0+y_0+2z_0}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0-2y_0+2z_0}{3} \\ \frac{-2x_0+y_0+2z_0}{3} \\ \frac{2x_0+2y_0+2z_0}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Avec $\vec{OP} = \vec{e}_1$ on a $x_0=1, y_0=z_0=0$. Ainsi $\vec{OP}' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = f(\vec{e}_1)$

De même on trouve $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, et $f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

La matrice de la transformation est $U = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Engénéral: Symétrie planaire de plan parallèle à $\vec{a}$ et $\vec{b}$
Dans la base $B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ où $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ la matrice est:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base B est $P = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$

Alors $\underline{U = P \cdot M' \cdot P^{-1}}$

Dans notre cas $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } U = P M' P^{-1}$$

EXERCICE 17

A) a) $M = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{o}) = M \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{u}_1$$

$$f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$

$$f(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b\vec{u}_1 + a\vec{u}_2$$

b) g : rotation de 180°

$$N = \begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = N$$

B) a) Rotation d'angle α autour de l'axe Oz

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 90^\circ: M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{o}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{u}_1$$

$$f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{u}_3 \text{ (invariant)}$$

$$f(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

b) g : rotation d'angle 180°

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) h rotation de 270°

$$R = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ & 0 \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot R = M \cdot M^{-1} = I$$

Exercice 18. $f: V_2 \rightarrow V_2$ $\text{Ker} f = \{ \vec{v}; \vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de f .

$$\bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \rightarrow M \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est invariant } \rightarrow M \cdot \vec{u} = \vec{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \Leftrightarrow b = 3a - 3 \\ 3c - d = -1 \Leftrightarrow d = 3c + 1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ donne } \begin{cases} a + 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow 7a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7} \\ c + 6c + 2 = 0 \Leftrightarrow 7c = -2 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{7} \\ b = -\frac{3}{7} \quad d = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Alors

$$M = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Exercice 19

$$f: V_3 \rightarrow V_3 \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(f) = \{ \vec{v} \in V_3 : f(\vec{v}) = \vec{0} \},$$

$$\text{Soit } \vec{v} = (x, y, z)^t$$

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} ; a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim \text{Ker}(f) = 1$$

$$\text{Im}(f) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}_3 : \exists \vec{u} \in \mathbb{R}_3 : f(\vec{u}) = \vec{v} \}$$

$$\text{Soit } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = a \\ x+y = b \\ 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = \frac{1}{2} z \end{cases}$$

Donc $\text{Im}(f) =$ le plan $y = x$ $\dim \text{Im}(f) = 2$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2x \\ x+y = 2y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = z \end{cases}$$

Alors les vecteurs invariants sont $\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} ; x, z \in \mathbb{R}$

EXERCICE 20

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = [4 + 10 + 18] = (32)$$

B.A imp

$$b) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

B.A imp

$$c) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \end{pmatrix} \quad B \cdot A \text{ imp.}$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \quad B.A$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$e) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix} \quad B.A \text{ imp.}$$

$$f) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -9 & 7 & 6 \\ 14 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -25 & 28 \\ 7 & -16 & 20 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 21 $f: V_2 \rightarrow V_2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A^2 est la matrice d'application $f \circ f$ c'est à dire de rotation de 60° . Alors $A^2 = B$

A^3 est la matrice de $f \circ f \circ f \Rightarrow$ rotation 90° degré

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

AB est la matrice de f o g càd la rotation 90° . Donc $AB = A^3$.

Exercice 22

$$f: V_3 \rightarrow V_3: \vec{v} \mapsto \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) \text{ où } \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_2$$

f est une homothétie de rapport 2, suivie d'une projection orthogonale sur le plan $x=y$, suivie par une symétrie d'axe parallèle à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } Q: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y=z=0$$

$$\text{Ker } Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Invariants: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

$$z = -z \Leftrightarrow z=0$$

les vecteurs invariants

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

Symétrie axiale d'axe parallèle à $\vec{u}$.

EXERCICE 23

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a) f(\vec{a}) = M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2x+y-4z \\ x+2y+4z \\ 2y+5z \end{pmatrix}$$

$$b) \text{Ker } f: \begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ 2y+5z=0 \end{cases}$$

$$\text{Det } M = -9 \neq 0 \text{ donc } \text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors f est un isomorphisme.

c) On résout le système

$$\begin{cases} 2x+y-4z=2 \\ x+2y+4z=7 \\ 2y+5z=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Alors } f^{-1}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour celle de $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on a le système

$$2x+y-4z=a$$

$$x+2y+4z=b$$

$$2y+5z=c$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2a}{9} + \frac{13b}{9} - \frac{4c}{3}$$

$$y = \frac{5a}{9} - \frac{10b}{9} + \frac{4c}{3}$$

$$z = -\frac{2a}{9} + \frac{4b}{9} - \frac{c}{3}$$

Ou

On trouve la matrice inverse de M .

$$M^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -12 \\ 5 & -10 & 12 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et puis on trouve.}$$

$$f^{-1}(\vec{c}) = M^{-1} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(\vec{d}) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{9} + \frac{13y}{9} - \frac{4z}{3} \\ \frac{5x}{9} - \frac{10y}{9} + \frac{4z}{3} \\ -\frac{2x}{9} + \frac{4y}{9} - \frac{z}{3} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 24. a) f n'est pas inversible car $\text{Ker} f \neq \{(\frac{0}{3})\}$

b) $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ C'est facile à trouver que

$$U^{-1} = U. \text{ Donc } f^{-1} = f$$

c) f n'est pas inversible car $\text{Ker} f \neq \{(\frac{0}{3})\}$

d) f n'est pas $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

EXERCICE 25.

a) Soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3c=1 & (1) \\ 2b+3d=0 & (2) \\ 4a+5c=0 & (3) \\ 4b+5d=1 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{cases} 2a+3c=1 \\ 4a+5c=0 \end{cases} \xrightarrow{+(-2)} \begin{cases} -4a-6c=-2 \\ 4a+5c=0 \end{cases} \\ (3) \quad \begin{cases} 4a+5c=0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -c=-2 \Leftrightarrow c=2 \text{ et } a=-\frac{5}{2} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2b+3d=0 \\ 4b+5d=1 \end{cases} \xrightarrow{+(-2)} \begin{cases} -4b-6d=0 \\ 4b+5d=1 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 4b+5d=1 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 4b+5d=1 \end{cases}$$

$$-d=1 \Leftrightarrow d=-1 \text{ et } b=\frac{3}{2}$$

$$\text{Alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a+g & b+h & c+i \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+d+g=1 & \Rightarrow -g-g+g=1 \Leftrightarrow g=-1 \\ a+g=0 & \Leftrightarrow a=-g \\ d+g=0 & \Leftrightarrow d=-g \end{cases} \quad \begin{matrix} g=-1 \\ a=1 \\ d=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} b+e+h=0 & \Rightarrow 1-h-h+h=0 \Leftrightarrow h=1 \\ h+b=1 & \Leftrightarrow b=1-h \\ e+h=0 & \Rightarrow e=-h \end{cases} \quad \begin{matrix} h=1 \\ b=0 \\ e=-1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} c+f+i=0 & \Rightarrow -i+1-i+i=0 \Leftrightarrow i=1 \\ c+i=0 & \Leftrightarrow c=-i \\ f+i=1 & \Leftrightarrow f=1-i \end{cases} \quad \begin{matrix} i=1 \\ c=-1 \\ f=0 \end{matrix}$$

Alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ On pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} ax+bz = 1 \times (-c) - cax - cbz = -c \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} cx+dz = 0 \times (a) + cax + adz = 0 \end{cases}$$

$$(ad-cb)z = -c \quad *$$

On suppose $ad-cb \neq 0$ ($\det A \neq 0$) Autrement A n'est pas inversible

Dans ce cas:

$$* \left\{ z = -\frac{c}{ad-cb} \right\}$$

On remplace en $\textcircled{1}$

$$\textcircled{1}: ax + \frac{bc}{ad-cb} = 1 \Leftrightarrow ax = 1 + \frac{bc}{ad-cb} = \frac{ad-cb+bc}{ad-cb} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax = \frac{ad}{ad-cb} \quad (a \neq 0) \quad \left\{ x = \frac{d}{ad-cb} \right\}$$

EXERCICE 28

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-2) - (1) = -1-1 = -2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A l'ordre

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{B} \quad \det B = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(3-1) + (1-6) = 4-5 = -1$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad B_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad B_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad B_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = +6 \quad B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 29

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$a) \det A = \frac{1}{5^3} \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^3} (-5) (91-16) = \frac{-75}{125} = -3$$

$$A_{11} = \frac{1}{5} (-7) \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = -\frac{7}{5} (8 \cdot 13) = -91 \dots$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -13 & 0 & -4 \\ 0 & -15 & 0 \\ -4 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{la matrice de } f^{-1}$$

$$\text{Jof} : A^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 13 & 0 & -16 \\ 0 & 5 & 0 \\ -16 & 0 & 37 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Jof})^{-1} : (A^2)^{-1} = A^{-2} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 37 & 0 & 16 \\ 0 & 45 & 0 \\ 16 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} \quad f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = -19\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 + 58\vec{u}_3$$

EXERCICE 30

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} x+1 \\ 2x+3y+2 \end{cases}$$

$$a) d: x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1 \quad d: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 5\lambda + 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 + \lambda \\ y' = 5 + 5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x' - 1 \\ y' = 5 + 5(x' - 1) \end{cases}$$

$$y' = 5x'$$

Donc l'image de la droite $y = x + 1$ est la droite d' : $y' = 5x'$

$$b) y' = x'^2 \Leftrightarrow 2x + 3y + 2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x - 3y - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3y - 1 = 0$$

Donc l'ensemble des points qui ont comme image la parabole $y = x^2$ sont les points de la courbe $x^2 = 3y + 1$.

EXERCICE 31

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad O'(-4; 4)$$

$$a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-4 \\ -y+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x+2y-4 & \Leftrightarrow y=2 \\ y = -y+4 & \Leftrightarrow 2y=4 \Leftrightarrow y=2 \end{cases}$$

Alors les points fixes sont les points sur la droite

$$y=2.$$

$$d) b: x-y+2=0 \Leftrightarrow y=x+2 \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2+2 \end{cases}$$

Alors l'image de (b) est:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 - 4 \\ -2 - 2 + 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3\lambda \\ y' = 2 - \lambda \end{cases} \quad \text{droite avec équation paramétrique}$$

$$\begin{aligned} x' &= 3\lambda \\ + 3y' &= 6 - 3\lambda \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x' = 3\lambda \\ + 3y' = 6 - 3\lambda \end{array} \right\} \underline{x' + 3y' = 6}$$

c) On a le système:

$$\begin{cases} ① x' = x + 2y - 4 \\ ② y' = -y + 4 \end{cases} \quad \text{et on cherche les expressions de } x \text{ et } y.$$

$$② \Rightarrow y = -y' + 4$$

$$\begin{aligned} ① &\Rightarrow x' = x + 2(-y' + 4) - 4 \Leftrightarrow x' = x - 2y' + 8 - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x' + 2y' - 4 = x. \end{aligned}$$

Donc l'application réciproque est:

$$\begin{cases} x = x' + 2y' - 4 \\ y = -y' + 4 \end{cases} \quad (*)$$

Alors c'est la même application.

$$a) a': x-y+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=2+2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{En remplaçant} \\ \text{en } (*) \end{array}$$

on obtient la même droite que en (d)
 $x+3y=6$

e) $x^2 + y^2 = 1$ On utilise l'affinité réciproque.

$$\begin{cases} x = x' + 2y' - 4 \\ y = -y' + 4 \end{cases}$$

Alors. $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x' + 2y' - 4)^2 + (-y' + 4)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x'^2 + 4y'^2 + 16 + 4x'y' - 8x' - 16y' + y'^2 + 16 - 8y' = 1$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + 5y'^2 + 4x'y' - 8x' - 24y' + 31 = 0.$$

f) d: $x + y + c = 0 \Rightarrow y = -x - c = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -c + \lambda \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = -\lambda + 2(\lambda - c) - 4 \\ y' = -(-c + \lambda) + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2c - 4 + \lambda \\ y' = c + 4 - \lambda \end{cases} \text{ droite // d.}$$

+

$$x' + y' = -c \Rightarrow x' + y' + c = 0$$

EXERCICE 35

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) [-(5+\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3(12 - 3\lambda - 18) + 3(-18 + 30 + 6\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-20 - 4\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 18) + 3(-6 - 3\lambda) + 3(6\lambda + 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 18\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 9\lambda + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0 (*)$$

une solution: $\lambda = -2$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -12 & -16 & -2 \\ \downarrow & -2 & 4 & 16 & \\ 1 & -2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$$(*) \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0 \quad \Delta = 4 + 32 = 36$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 (\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}$$

Donc on a 2 valeurs propres

$\lambda_1 = -2$ (double)

On cherche les vecteurs propres:

$$A\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 3x - 5y + 3z \\ 6x - 6y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 3z = -2x \\ 3x - 5y + 3z = -2y \\ 6x - 6y + 4z = -2z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x = y - z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc deux vecteurs propres associés à $\lambda_1 = -2$
sont $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 4$$

$$A\vec{v} = 4\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3y+3z \\ 3x-5y+3z \\ 6x-6y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-3y+3z=0 & (1) \\ 3x-9y+3z=0 & (2) \\ 6x-6y=0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow x=y$$

$$(1) \Rightarrow x+y-z=0 \xrightarrow{x=y} 2x=z$$

$$(2) \Rightarrow 3x-9y+3z=0 \vee$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 4$ est $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad B - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -3-\lambda$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -7 & 5-\lambda \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)(-10+2\lambda-5\lambda+\lambda^2+6) - (14+7\lambda-6) - (-42+30-6\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) - 8 - 7\lambda + 6\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\lambda^2+9\lambda+12-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda-\lambda+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3+12\lambda+16=0 \Leftrightarrow \lambda^3-12\lambda-16=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

$$\bullet \underline{\underline{\lambda = -2}}$$

$$B\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \\ -2v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3V_1 + V_2 - V_3 = -2V_1 \\ -7V_1 + 5V_2 - V_3 = -2V_2 \\ -6V_1 + 6V_2 - 2V_3 = -3V_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -V_1 + V_2 - V_3 = 0 \\ -7V_1 + 7V_2 - V_3 = 0 \\ -6V_1 + 6V_2 + V_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 - V_2 - V_3 = 0 \quad (1) \\ 7V_1 - 7V_2 + V_3 = 0 \quad (2) \\ 6V_1 - 6V_2 - V_3 = 0 \quad (3) \end{cases} \quad V_3 = 0$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 8V_1 - 8V_2 = 0 \Leftrightarrow V_1 = V_2$$

$$(2) \Rightarrow 7V_1 - 7V_1 + V_3 = 0 \Leftrightarrow V_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et le vecteur propre } \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ associe' a } \lambda_1 = -2$$

$$\bullet \lambda = 4 \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4V_1 \\ 4V_2 \\ 4V_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3V_1 + V_2 - V_3 = 4V_1 \\ -7V_1 + 5V_2 - V_3 = 4V_2 \\ -6V_1 + 6V_2 - 2V_3 = 4V_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7V_1 + V_2 - V_3 = 0 \quad (1) \\ -7V_1 + V_2 - V_3 = 0 \quad (2) \\ -6V_1 + 6V_2 - 6V_3 = 0 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -7V_1 + V_2 - V_3 = 0 \quad (1) \\ V_1 - V_2 + V_3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow -6V_1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 0$$

$$(2) \xrightarrow{V_1=0} -V_2 + V_3 = 0 \Leftrightarrow V_2 = V_3$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et le vecteur propre est } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 36

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$i) (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & 10-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(10-\lambda) + 6 = 0 \Leftrightarrow 30 - 10\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \quad \Delta = 25 \quad \lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$$\bullet \lambda_1 = 9 : A\vec{v} = 9\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9v_1 \\ 9v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3v_1 - 3v_2 = 9v_1 \\ 2v_1 + 10v_2 = 9v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6v_1 - 3v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = -2v_1$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur propre associé est $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\bullet \lambda_2 = 4 : A\vec{v} = 4\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 \\ 4v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3v_1 - 3v_2 = 4v_1 \\ 2v_1 + 10v_2 = 4v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 - 3v_2 = 0 \\ 2v_1 + 6v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -3v_2$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur propre est $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) On a $f(\vec{p}_1) = 9\vec{p}_1 + 0\vec{p}_2$ et $f(\vec{p}_2) = 0\vec{p}_1 + 4\vec{p}_2$
 alors la matrice B de f dans la base $(\vec{p}_1; \vec{p}_2)$ est

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$iv) f(\vec{a}) = A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ (dans la base } (\vec{u}_1, \vec{u}_2))$$

$$f(\vec{b}) = B \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (dans la base } (\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$i) \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(-\lambda) + 4 = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0$$

$\lambda = 2$. Donc on a qu'une valeur propre (double) $\lambda = 2$

$$\bullet A\vec{p} = 2\vec{p} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 \\ 2p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4p_1 + p_2 = 2p_1 \\ -4p_1 = 2p_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 + p_2 = 0 \\ -2p_1 = p_2 \end{cases} \quad \text{Alors} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -2p_1 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et $\vec{p}$, le vecteur propre est.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

iii) Comme il y a que un vecteur propre on ne peut pas former une base-propre.

$$iv) f(\vec{a}) = A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$i) \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

$$\bullet \underline{\lambda_1 = 0} \quad A\vec{p}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + 3p_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1 = -3p_2 \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \underline{\lambda_2 = 1} \quad A\vec{p}_2 = \vec{p}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p_1 + 3p_2 = p_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ii) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$iv) f(\vec{a}) = A\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{base } (\vec{u}_1, \vec{u}_2))$$

$$f(\vec{b}) = B\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{base } (\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & -9-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-9-\lambda) + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 + 9\lambda - 9 - \lambda^2 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -8.$$

$$\lambda_1 = 0. \quad A\vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 - 3p_2 = 0 \\ 3p_1 - 9p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 = 3p_2. \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -8. \quad A\vec{p} = -8\vec{p} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8p_1 \\ -8p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 - 3p_2 = -8p_1 \\ 3p_1 - 9p_2 = -8p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9p_1 - 3p_2 = 0 \\ 3p_1 - p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3p_1 = p_2$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 3p_1 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Alors } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$iv) f(\vec{a}) = A\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (\text{base } (\vec{u}_1, \vec{u}_2))$$

$$f(\vec{b}) = B\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (\text{base } (\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

$$e) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad \text{impossible.}$$

Alors il n'y a pas de valeurs propres.

EXERCICE 37

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad M - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = -1$$

$$\bullet \lambda_1 = 6 \quad M\vec{v} = 6\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6v_1 \\ 6v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 = 6v_1 \\ 5v_1 + 4v_2 = 6v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5v_1 + 2v_2 = 0 \\ 5v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = \frac{5}{2}v_1$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{5}{2}v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Alors le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 6$ est :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda_2 = -1 \quad M\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 = -v_1 \\ 5v_1 + 4v_2 = -v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 4v_1 + 4v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -v_2$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}: M^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \det M^{-1} =$$

$$\det(M^{-1} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow 6\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{6} \quad \lambda_2 = -1$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En général: Si λ est une valeur propre $\lambda \neq 0$ de $f \Rightarrow$
 $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de f^{-1}

EXERCICE 38

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(4-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = -2$$

$$\bullet \lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ Donc } \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda_2 = -2: \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Une homothétie de facteur 2 suivie par une symétrie axiale par rapport à l'axe Ox.

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda) = -(2-\lambda+1-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow$$

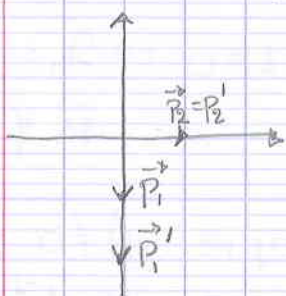
$$\Leftrightarrow -(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$$

$$\bullet \lambda_1 = -2: \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Donc } \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda_2 = 1: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0.$$

$$\text{et } \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Affinité axiale orthogonale.
d'axe Ox de direction Oy
de facteur -2

$$c) A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(2+\lambda)(3-\lambda) + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

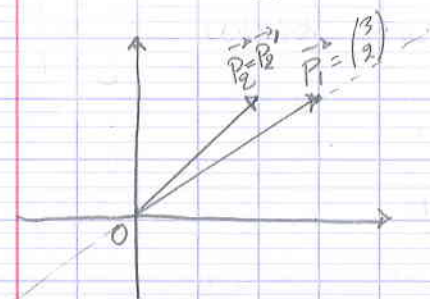
$$\bullet \lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2x+3y \\ -2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-2x+3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3x+3y \\ -2y+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+y=0 \Leftrightarrow y=x \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Projection de direction $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur l'axe de direction de $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

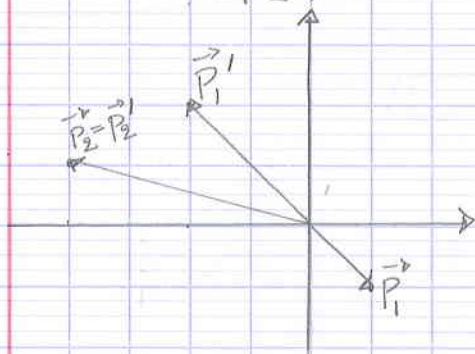
$$\Leftrightarrow -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x$$

$$\text{et } \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=0 \\ -x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4y$$

$$\text{et } \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Affinité axiale ol'axe de $\vec{P}_2$ de direction $\vec{P}_1$ de facteur -2.

EXERCICE 39.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = 0 \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors c'est une projection sur le plan parallèle à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de direction v_3 .

b. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 0 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projection sur un axe parallèle à $\vec{v}_1$ de direction parallèle à $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$. c'est parallèle au plan: $x+y=0$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = -1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Symétrie axiale d'axe parallèle à $\vec{v}_3$
le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie
est le plan formé par les vecteurs
 $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$: $x+y=0$

EXERCICE 40

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 0 \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ l'application peut être décrite par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Projection sur le plan formé par les $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ de direction $\vec{v}_3$.

EXERCICE 41

$$B = (\vec{u}_1; \vec{u}_2) \quad B' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2) \quad \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dans la } B \Rightarrow \vec{a}' = P^{-1} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dans la } B'$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}' = P^{-1} \vec{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c}' = P^{-1} \vec{c} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 42

$$B = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3) \quad B' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

$$\vec{v}_1 = -4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2, \quad \vec{v}_2 = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3, \quad \vec{v}_3 = 8\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}' = P^{-1} \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}' = P^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c}' = P^{-1} \vec{c} = \begin{pmatrix} -18 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 43

a.

$f: M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base $B = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

• Vérification: $\det(\vec{v}_1; \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Donc les $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont linéairement indépendants.
 $\Rightarrow$ ils forment une base de V_2 .

• $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M' = P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

• $\det M = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 2 = 22$

$\det M' = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22 = \det M$

b. $f: V_3 \rightarrow V_3 \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ dans la $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$B' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

• $A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

valeurs - vecteurs propres:

$\lambda_1 = 3 \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0 \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

la matrice décrit une homothétie de rapport 3, suivie d'une projection sur l'axe parallèle à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de direction parallèle à $\vec{b}$ etc.

c. $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ $\vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_3$

la direction de la projection et $\vec{v}_3 = \vec{u}_3$

Alors dans la base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ la matrice est

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dans la base B est

$$M = P M' P^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base B

d. $\varphi = 30^\circ$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche une base orthonormée $B'(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.
le plan $\perp \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $-y+z=0: \Pi$

$$\vec{v}_2 \in \Pi \quad \text{pour ex.} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Alors} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dans cette base la matrice U' est

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30 & -\sin 30 \\ 0 & \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de changement est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la matrice de la rotation dans la base B est:

$$U = P U' P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 44

a.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = P A' P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. $\Pi: x-y=0$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B'$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = P M' P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans la base canonique}$$

EXERCICE 45

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 4 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc dans la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 6 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dans la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ $B' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ponc C n'est pas diagonalisable

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \quad D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{89}) \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(5 + \sqrt{89}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{89}) \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(5 - \sqrt{89}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3 + \sqrt{89}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3 - \sqrt{89}) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_1 = (1 \ 2 \ 1)^t \\ \vec{V}_2 = (-1 \ 0 \ 1)^t \\ \vec{V}_3 = (-1 \ 1 \ 0)^t \end{array}$$

$$G' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -\sqrt{2} \\ \lambda_2 = \sqrt{2} \\ \lambda_3 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_1 = (0 \ 1 -\sqrt{2} \ 1)^t \\ \vec{V}_2 = (0 \ 1 +\sqrt{2} \ 1)^t \\ \vec{V}_3 = (1 \ 0 \ 0)^t \end{array}$$

$$H' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2+\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2-\sqrt{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_1 = (1 \ 2+\sqrt{2} \ 1)^t \\ \vec{V}_2 = (1 \ 2 \ 0)^t \\ \vec{V}_3 = (1 \ 2-\sqrt{2} \ 1)^t \end{array}$$

$$J' = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 63 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_1 = (21 \ 1 \ 0)^t \\ \vec{V}_2 = (1 \ 0 \ 0)^t \end{array}$$

K n' est pas diagonalisable.

EXERCICE 46

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 série 10

EXERCICE 48

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 10 \\ -4 & 2 & -14 \\ 10 & -14 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

a. Symétrique: $A = A^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 10 \\ -4 & 2 & -14 \\ 10 & -14 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A \text{ symétrique}$$

b. $\lambda_1 = -18 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 18 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_3 = -9 \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc on a 3 valeurs propres distinctes et

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$$

EXERCICE 49

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = 1$$

• $A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A^t \Rightarrow A \text{ orthogonale}$

EXERCICE 50

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \det A = 1$$

• $\lambda_3 = 1 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors l'application est une rotation autour du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle $\alpha = \angle(\vec{a}, f(\vec{a}))$ où $\vec{a} \perp \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{a}) = A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \|f(\vec{a})\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot f(\vec{a})}{\|\vec{a}\| \cdot \|f(\vec{a})\|} = \frac{4/5}{1 \cdot 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36.8^\circ$$

Autrement: $\cos \alpha = \frac{1}{2} (\text{Tr}(A) - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{5} - 1 \right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow$
 $\cos \alpha = 36.8^\circ$

• $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \det(B) = -1$

$\lambda = -1 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors l'application associée à B est une rotation autour d'axe // à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle
 $\cos \alpha = \frac{1}{2} (\text{Tr}(B) + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5} \right) = \frac{4}{5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha = 36.8^\circ$

suivie par une symétrie planaire de plan $\perp$ à $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: le plan xOy : $z=0$.

• $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(C) = 1$

$\lambda = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rotation autour d'axe // $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle
 $\cos \alpha = \frac{1}{2} (\text{Tr}(C) - 1) = \frac{1}{2} (2 - 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

• $D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \det(D) = -1$

$\lambda_1 = -1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rotation autour d'axe // $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle
 $\cos \alpha = \frac{1}{2} (\text{Tr}(D) + 1) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

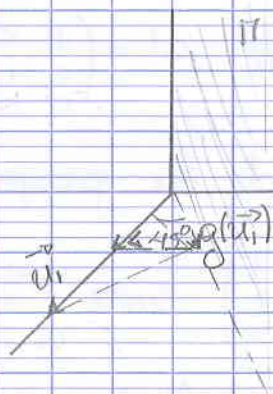
Donc on a une symétrie planaire par rapport à un plan qui est formé par les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $2x - 2y + z = 0$

EXERCICE 51

$$\Pi: x-y=0 \quad \vec{d} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

a.



$$\begin{aligned} j(\vec{u}_1) &= \vec{u}_2 \\ j(\vec{u}_2) &= \vec{u}_1 \\ j(\vec{u}_3) &= \vec{u}_3 \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet M^2 = I$$

$$\bullet M^{-1} = M$$

$$\bullet \lambda_1 = -1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Soit j la projection orthogonale:

$$\|j(\vec{u}_1)\| = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$j(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet N^2 = I$$

$$\bullet MN = N$$

c. la base consiste aux vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui forment le plan } \Pi.$$

et le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallèle à la projection.

$$B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ dans laquelle } G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la propre à canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice de g dans la base canonique est

$$G = P G' P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

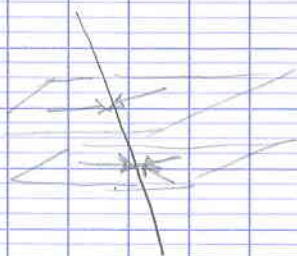
d.

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors c'est une projection sur un axe $\parallel \vec{v}_1$
de direction $\parallel$ à $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$



EXERCICES 2

$$U = \begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

$$a. \begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -b-a \\ 0 \end{pmatrix} = (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors il s'agit d'un vecteur propre avec la valeur propre correspondante $(a+b)$

$$b. a=0 \quad b=1 \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

valeur propre $\lambda_1 = 1$ vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\lambda_2 = -1$ " " " " $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\lambda_3 = 0$ " " " " $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le plan de symétrie est le plan perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$c. a = \frac{2}{3} \quad b = \frac{1}{3} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'axe de rotation est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un vecteur $\perp$ à $\vec{v}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}$

L'image de $\vec{v}$ est $M\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Et l'angle de rotation

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot f(\vec{v})|}{\|\vec{v}\| \cdot \|f(\vec{v})\|} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = 70.53^\circ}$$

$$a=1 \quad b=2 \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d. \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \quad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

Alors on a les valeurs propres

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

Comme on a 3 valeurs propres distinctes
 $\Rightarrow M$ diagonalisable

e. On cherche le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 0$.

C'est le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors son image est nulle $M\vec{v}_1 = 0 \cdot \vec{v}_1 = 0$

f. affinité $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

g. Comme le point $A(1; 1; 1)$ est fixe on a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{O'(3; 3; -3)}$ l'image de l'origine

g. $\Pi: \begin{cases} x = 1 + k + m \\ y = 1 + k - m \\ z = 1 - k \end{cases}$

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On remplace le plan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+k+m \\ 1+k-m \\ 1-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{x} + \cancel{x} + m - \cancel{2} - \cancel{2k} + 2m - \cancel{1} + \cancel{k} + \cancel{3} \\ -\cancel{2} - \cancel{2k} - 2m + \cancel{1} + \cancel{k} - m - \cancel{1} + \cancel{k} + \cancel{3} \\ \cancel{1} + \cancel{k} + m + \cancel{1} + \cancel{k} - m + \cancel{2} - \cancel{2k} - \cancel{3} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3m \\ 1 - 3m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors l'image du plan est une droite
qui passe par le point $A(1; 1; 1)$ avec
le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$