LDDR – Niveau II : Algebre Lineaire

Exercice 1

a) Décrire géométriquement les transformations $f : \overrightarrow{OP} \longmapsto \overrightarrow{OP'}$ données algébriquement ci-dessous.

1) $f : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ 2) $f : \begin{cases} x' = x \\ y' = x \end{cases}$

b) Décrire algébriquement les transformations données ci-dessous.
1) Rotation dans le plan de 30° autour de l'origine O.
2) Rotation dans l'espace de 90° autour de l'axe Oz.
3) Projection orthogonale sur l'axe Oz.
4) Symétrie par rapport au mur suivie d'une projection dans la paroi.

Exercice 2

Vérifier que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.
Vérifier que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 3

On considère l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ muni des deux opérations :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ b \end{pmatrix}$$

Montrer que cet ensemble muni de ces deux opérations, n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 4

a) Montrer que l'ensemble P_2 des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un espace vectoriel puis donner une base de P_2.

b) Les polynômes $p_1 = x^2 + x + 4$, $p_2 = 2x^2 + x + 9$ et $p_3 = x^2 + 2x + 3$ forment-ils une base de P_2 ?

c) Montrer que l'ensemble des polynômes p qu'on peut exprimer sous la forme
$p = \alpha\, p_1 + \beta\, p_2 + \gamma\, p_3$, ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$)
forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel P_2.
Donner une base de cet espace.

Exercice 5

On note $M_{2,2}$ l'ensemble des matrices carrées

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R} \right\}$$

Les opérations dans $M_{2,2}$ sont définies de la façon suivante :

Addition de 2 matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par par un scalaire

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $M_{2,2}$ forme un espace vectoriel réel.

b) Donner une base de cet espace vectoriel.

c) Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R}, \right\}$ forme un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}$.

d) L'ensemble des matrices $M_{2,2}$ forme-t-il un corps ?
La multiplication de deux matrices est définie (*lignes par colonnes*) par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Dans V_3 on considère les vecteurs

$\vec{v}_1 = -\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = 4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ et $\vec{v}_3 = 10\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$

a) Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

b) Vérifier que les vecteurs $\vec{p}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{p}_2 = \vec{u}_3$ forment une base du sous-espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, puis décrire ce sous-espace vectoriel.

Exercice 7

Dans V_3 muni d'une base standard (orthonormée), on donne des vecteurs.
Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel W engendré par ces vecteurs.

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vérifier que les deux derniers sous-espaces sont égaux, puis donner une base orthonormée de ce sous-espace vectoriel W.

f) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vérifier que ce dernier sous-espace de V_3 est également un sous-espace vectoriel du plan vectoriel défini aux points d et e.

Exercice 8

a) Vérifier que $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ est une application linéaire de V_2 dans V_2.

b) Vérifier que $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1+x \\ y \end{pmatrix}$ n'est pas une application linéaire de V_2 dans V_2.

Exercice 9

Montrer qu'une application f d'un espace vectoriel réel V vers un espace vectoriel réel W est linéaire si et seulement si

$f(x\vec{a} + y\vec{b}) = xf(\vec{a}) + yf(\vec{b})$ pour tout $\vec{a}$ et $\vec{b} \in V$ et pour tout x et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) $\mathbb{R} \longrightarrow V_2$, $f: x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$

b) $V_3 \longrightarrow V_2$, $f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix}$

c) $V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x + y$

d) $\mathbb{R} \longrightarrow V_2$, $f: x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$

Exercice 11

On considère les transformations f de V_2 dans V_2 données ci-dessous.
Décrire en termes géométriques la transformation f si elle est linéaire, sinon expliquer pourquoi elle ne l'est pas.

a) $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

b) $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

d) $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

e) $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

f) $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

Exercice 12

Chercher les noyaux et les images des applications linéaires des exercices 10 et 11

Donner dim(Ker(f)) et dim(Im(f))

Donner une base de Ker(f) et une base de Im(f)

Exercice 13

Soit $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}$ de V_2 dans V_2.

a) Vérifier que f est une application linéaire bijective (isomorphisme)

b) Déterminer l'image par f de la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ de V_2

c) Donner la matrice de f.

d) Trouver les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que $f(\vec{v}_1) = \vec{u}_1$ et $f(\vec{v}_2) = \vec{u}_2$.

Exercice 14

Trouver les matrices des applications linéaires de V_2 dans V_2 :

a) Homothétie de rapport 3

b) Symétrie d'axe Ox,
symétrie d'axe Oy

c) Symétrie centrale

d) Symétrie d'axe $y = x$

e) Rotation de 30°

f) Projection orthogonale sur l'axe Ox,
Projection orthogonale sur l'axe sur l'axe Oy

g) Projection sur l'axe Ox de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

h) Projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$

i) Symétrie d'axe de direction $\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$

j) Affinité axiale d'axe Ox, de direction $\vec{u}_2$ de rapport -2.

k) Affinité axiale d'axe Ox, de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ de rapport 2.

Exercice 15

Décrire géométriquement les applications linéaires de V_3 dans V_3 données ci-dessous, préciser Im(f) et Ker(f) et donner leurs matrices.

a) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ b) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ c) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ d) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$

Exercice 16

Trouver les matrices des applications linéaires de V_3 dans V_3.

a) Symétrie planaire de plan $x = y$

b) Rotation de 120° autour de l'axe de direction $\vec{u}_1$

c) Projection orthogonale sur l'axe de direction $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

d) Projection verticale sur le plan $x + y - z = 0$

e) Projection orthogonale sur le plan $x + y - z = 0$

f) Symétrie planaire de plan $x + y - z = 0$

Exercice 17

A) Soit l'application f de V_2 dans V_2 qui, à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le vecteur $\vec{w} = f(\vec{v})$ obtenu par rotation de 90°.

a) Donner la matrice M de f dans la base $\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\}$

Trouver l'image de $\vec{o}$, de $\vec{a} = 5\vec{u}_2$, de $\vec{b} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et de $\vec{c} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$

b) On considère l'application $g = f \circ f$, donner la matrice N de g puis vérifier que $N = M \cdot M$

c) On considère l'application $h = f^{-1}$, donner la matrice R de h puis vérifier que $M \cdot R = I$ où I est la matrice identité.

B) Soit l'application f de V_3 dans V_3 qui, à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le vecteur $\vec{w} = f(\vec{v})$ obtenu par rotation de 90° autour de l'axe de direction $\vec{u}_3$.

a) Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$

Trouver l'image de $\vec{o}$, $\vec{a} = 5\vec{u}_2$, $\vec{b} = 3\vec{u}_3$, $\vec{c} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3$ et $\vec{d} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$

b) On considère l'application $g = f \circ f$, donner la matrice N de g puis vérifier que $N = M \cdot M$

c) On considère l'application $h = f^{-1}$, donner la matrice R de h puis vérifier que $M \cdot R = I$ où I est la matrice identité.

Exercice 18

Une application linéaire f de V_2 dans V_2 est donnée par son noyau

$Ker(f) = \left\{\vec{v}; \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et par un vecteur invariant, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trouver la matrice de f.

Exercice 19

Une application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par sa matrice

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les sous espaces vectoriels de V_3 suivants : $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et l'ensemble des vecteurs invariants.

Exercice 20

Calculer, si possible, les produits matriciels $A \cdot B$ et $B \cdot A$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 21

f de V_2 dans V_2 décrit une rotation de 30°, g une rotation de 60°.
Donner la matrice A de f et la matrice B de g puis calculer A^2, A^3 et $A \cdot B$

Exercice 22

On considère l'application V_3 dans V_3 :

$f : \vec{v} \mapsto \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u})$ où $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2$

Décrire f géométriquement puis donner sa matrice P par rapport à la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.
Calculer les matrices $Q = I - P$, P^2, Q^2 et $P \cdot Q$ où I est la matrice de l'application identique.

Calculer le noyau et les vecteurs invariants de Q, puis décrire Q géométriquement.

Exercice 23

Soit f une application linéaire de V_3 dans V_3 telle que

$f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ et $f(\vec{u}_3) = -4\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3$

a) Trouver l'image de $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ et celle de $\vec{b} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$

b) L'application f est-elle bijective ?

c) Trouver l'image réciproque de $\vec{c} = 2\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ puis celle de $\vec{d} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3$

Exercice 24

Décrire, si possible, les réciproques des applications de l'exercice 15.

Exercice 25

Calculer la matrice inverse de A en posant $A \cdot A^{-1} = I$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Exercice 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculer $|A|$, $|B|$ et $|A \cdot B|$

Exercice 27

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, calculer

$\det(A)$, $\det(B)$, $A \cdot B$, $\det(A \cdot B)$, A^{-1}, $\det(A^{-1})$, B^{-1}, $\det(B^{-1})$

Exercice 28

Calculer l'inverse des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 29

Une transformation linéaire f est donnée par sa matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -13 \end{pmatrix}$

a) trouver la matrice des transformations f^{-1} et $(f \circ f)^{-1}$

b) trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - 22\vec{u}_3$

Exercice 30

On donne une affinité générale par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a) Trouver l'image de la droite $d : x - y + 1 = 0$ (après avoir déterminé l'équation paramétrique de d).

b) Trouver l'ensemble des points qui ont comme image la parabole $y = x^2$.

Exercice 31

On donne une affinité du plan par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et par l'image $O'(-4; 4)$ de l'origine.

a) Trouver les points fixes.

b) Trouver l'ensemble des points qui ont comme image la droite $a': x - y + 2 = 0$.

c) Chercher l'expression de l'affinité réciproque.

d) Déterminer l'équation de l'image de la droite $b: x - y + 2 = 0$

e) Déterminer l'équation de l'image du cercle unité : $x^2 + y^2 = 1$.

f) Déterminer les équations des images des droites $d: x + y + c = 0$.

Exercice 32

a) Quel est le centre de la rotation que l'on obtient en effectuant d'abord une rotation de 180° autour de $A(1; -1)$ puis une rotation de -90° autour de $B(3; 1)$?

b) Le centre serait-il le même si l'on avait composé les rotations dans l'autre sens ?

Exercice 33

On donne l'affinité générale par $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - 2y - 3 \end{cases}$

a) Monter que l'affinité contient une droite invariante point par point, droite dont on donnera l'équation.

b) Les verticales sont globalement invariantes, pourquoi ?

c) On considère le cercle trigonométrique c, $T(0;1)$ un de ses point et t la tangente au cercle en T, ainsi que leurs images c', T' et t' par l'affinité.
Trouver les coordonnées de T' et les équations de c' et t'.

d) Trouver un vecteur $\vec{v}$ dont l'image est horizontale.
En déduire les équations des tangentes au cercle dont les images sont horizontales

e) Interpréter géométriquement cette affinité.

Exercice 34

Dans l'espace, on considère l'affinité f de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ qui laisse fixe le point $A(1;1;2)$.

a) Quelle est l'image de l'origine par cette affinité ?

b) Quelle est l'image par cette affinité du plan π contenant le point A et les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

c) Quelle est l'image par cette affinité de la droite c qui passe par A parallèlement au vecteur $\vec{c} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$?

d) Quelle est l'image d' par cette affinité de la droite d qui passe par $B(1;2;3)$ parallèlement au vecteur $\vec{d} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$? Vérifier que la droite d' appartient au plan α formé par le point A et les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$.

e) Donner l'image P' par f d'un point $P(4;2;1)$.
Trouver les coordonnées du point P^*, intersection de la droite passant par P parallèlement à $\vec{b}$ avec le plan α.

f) Décrire géométriquement l'affinité f.

Exercice 35

Trouver les valeurs et les vecteurs propres des matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 36

Une application linéaire f est donnée dans une base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ par sa matrice A.

a) $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & 10\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

b) Dessiner les vecteurs propres et construire l'image d'un vecteur $\vec{v}$ quelconque.

c) Donner si possible la matrice B de f dans la base $(\vec{p}_1;\vec{p}_2)$ formée de vecteurs propres.

d) Calculer l'image de $\vec{a}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ et celle de $\vec{b}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$

Exercice 37

Une transformation linéaire f est donnée par sa matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$.

Calculer les valeurs et les vecteurs propres de f et de f^{-1}.

Exercice 38

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des applications linéaires données, dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$, par les matrices ci-dessous puis décrire géométriquement ces applications.

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

Exercice 39

Calculer valeurs propres et vecteurs propres des applications linéaires données, dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$, par les matrices ci-dessous puis décrire géométriquement ces applications

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Exercice 40

Chercher les valeurs et vecteurs propres de l'application f donnée, dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$, par la matrice $M=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 2 & 8 & -2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Cette même application f peut être décrite dans une base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ par la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Préciser la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$.

Exercice 41

Dans V_2 on considère les bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2)$. avec $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

Donner la matrice de changement de base P et son inverse P^{-1}

Exprimer les vecteurs $\vec{a} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{b} = 2\vec{u}_1$ et $\vec{c} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 42

Dans V_3 on considère la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$. ainsi que la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$. où $\vec{v}_1 = -4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ et $\vec{v}_3 = 8\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + \vec{u}_3$

Donner la matrice de changement de base P et son inverse P^{-1}

Exprimer les vecteurs $\vec{a} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $\vec{b} = -\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$ et $\vec{c} = 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 43

a) L'application linéaire f de V_2 dans V_2 est donnée par la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$.

Soit $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Vérifier que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ forment une base $\mathcal{B}'$ de V_2 puis chercher la matrice M' de f relativement à cette base.

Comparer $\det(M)$ et $\det(M')$ où M' est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$.

b) L'application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par sa matrice

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

Donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ où $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3, \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2,$ et $\vec{v}_3 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$.

Décrire géométriquement l'application f.

c) Donner, par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$., la matrice M décrivant la projection orthogonale sur le plan définis par les vecteurs $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ et $\vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_3$.

d) Donner, par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, la matrice M décrivant une rotation de 30° autour de l'axe parallèle à $\vec{v}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_3$.

Exercice 44

a) L'application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par la matrice

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$

où $\vec{v}_1 = \vec{u}_3, \vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2$ et $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

b) On donne le plan (vectoriel) d'équation $\pi: x - y = 0$.

Donner une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ avec $\vec{v}_3$ perpendiculaire au plan π, puis déterminer la matrice décrivant une symétrie planaire de plan π.

Exercice 45

Diagonaliser si possible les matrices suivantes

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 63 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 46

Une transformation linéaire f de V_2 dans V_2 est donnée par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^{-1}, A^2, A^3.
2) Calculer les valeurs et vecteurs propres de f et de $f \circ f$.
3) Choisir une base de vecteurs propres de f puis donner dans cette base la matrice B de f.
4) Calculer B^{-1}, B^2, B^3 et B^n.
5) En utilisant la base propre de f, calculer la matrice A^n.
   Vérifier le résultat en posant successivement $n = -1$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 47

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre plus de possibilités d'emplois.

20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour trouver un meilleur emploi.

Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en X, quelle est la population de X et de Y au bout de 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans, 100 ans ?

Exercice 48

Dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$ on donne une application linéaire f par sa matrice $A = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 10 \\ -4 & 2 & -14 \\ 10 & -14 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que f est symétrique.
b) Vérifier que les valeurs propres sont distinctes et que les vecteurs propres sont perpendiculaires entre eux.

Exercice 49

Vérifier que la matrice $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'une application linéaire f de V_2 dans V_2 exprimée dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ est orthogonale puis déterminer la matrice inverse M^{-1} (constatation ?).

Exercice 50

Décrire géométriquement les transformations orthogonales données dans la base $B = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$ par les matrices

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 51

On considère le plan $\pi : x - y = 0$, ainsi que la droite d passant par l'origine parallèlement au vecteur $\vec{d} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

a) On considère l'application linéaire f qui associe à un vecteur $\vec{v}$ son symétrique par rapport à π.
Donner l'image par f des vecteurs de base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, puis la matrice M de cette symétrie ainsi que les matrices M^2 et M^{-1}.
Quels sont les valeurs et les vecteurs propres de f ?

b) Donner la matrice N de la projection orthogonale sur le plan π ainsi que les matrices N^2 et MN.

c) On considère l'application linéaire g qui associe à un vecteur $\vec{v}$ sa projection sur le plan π parallèlement à $\vec{d}$. Donner une base $(\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{p}_3)$, par rapport à laquelle la matrice G' de g s'écrit $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$., puis déterminer la matrice G de g par rapport à la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$.

d) On considère l'application linéaire h, donnée, dans la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$, par la matrice $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Trouver les valeurs et les vecteurs propres de H, puis caractériser géométriquement l'application h.

Exercice 52

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé standard, une transformation linéaire est donnée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b & -a \\ -b & a & -a \\ a & a & b \end{pmatrix}$, a et b étant deux nombres donnés.

a) Calculer l'image du vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire qu'il s'agit d'un vecteur propre. Donner la valeur propre correspondante.

b) Si $a = 0$ et et $b = 1$ M est la matrice d'une symétrie planaire. Par observation géométrique, donner un vecteur perpendiculaire au plan de symétrie.

c) Si $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$, expliquer pourquoi M est la matrice d'une rotation autour d'un axe. Vérifier que $\vec{t}$ est un vecteur directeur de l'axe, puis déterminer l'angle de rotation.

Pour la fin du problème, on choisit $a = 1$ et $b = 2$ si bien que $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) En admettant que $Det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$, I désignant la matrice de l'identité, déterminer les valeurs propres de M. En déduire, sans nouveaux calculs, que la matrice est diagonalisable.

e) Quels sont les vecteurs dont l'image par la transformation de matrice M est nulle ?

Dans l'espace, on considère l'affinité de matrice M qui laisse fixe le point $A(1; 1; 1)$.

f) Quelle est l'image de l'origine par cette affinité ?

g) On appelle π le plan contenant le point A et les vecteurs $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quelle est l'image de ce plan par l'affinité ?