Exercice 5.1

Déterminer m, n, p, q de sorte que : $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ m \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} n \\ 9.6 \\ p \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -9 \\ q \\ -15 \end{pmatrix}$

Exercice 5.2

a. Déterminer dans les deux cas suivants si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ forment une base de l'espace :
   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$

b. Déterminer la valeur de z pour que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ soient linéairement dépendants : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$

c. Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes de $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{d} = -5\vec{a} + 7\vec{b}$ et $\vec{e}$ tel que $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{e} = 0$.

Exercice 5.3

Compléter le tableau ci-dessous :

A	$(1\,;-2\,;5)$	$\left(-5\,;\frac{1}{2}\,;6\right)$	$(\ldots\,;\ldots\,;\ldots)$	$(0\,;-1\,;6)$	$\left(4\,;\ldots\,;\frac{1}{4}\right)$
B	$(\ldots\,;\ldots\,;\ldots)$	$\left(4\,;1\,;\frac{1}{3}\right)$	$(6\,;2\,;-4)$	$(\ldots\,;3\,;\ldots)$	$\left(\ldots\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$
$\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \ldots \end{pmatrix}$

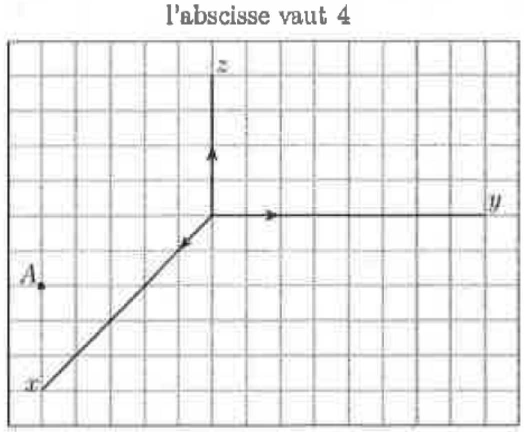
Exercice 5.4

Soient les points $O(0\,;0\,;0)$, $A(4\,;0\,;0)$, $B(4\,;6\,;0)$, $C(0\,;6\,;0)$ et $D(2\,;0\,;4)$.
Placer, sur un dessin soigné, les points E, F et G tels que O, A,B,C,D,E,F et G, soient les sommets d'un parallélépipède. Calculer ensuite les coordonnées des sommets E,F et G. Pour terminer, déterminer les coordonnées des points milieux de EF et de CD. Quelle est la forme des faces $DEFG$ et $BCGF$? En déterminer les centres.

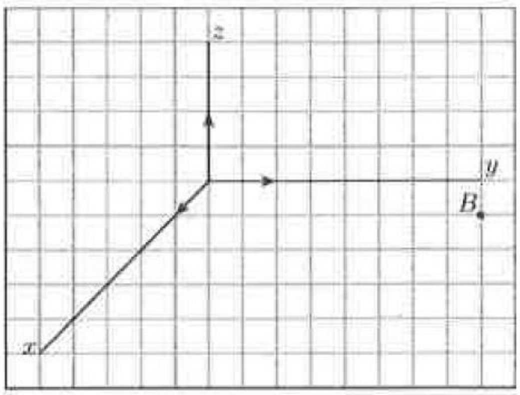
Exercice 5.5

Dessiner les projections des points suivants et estimer leurs coordonnées inconnues.

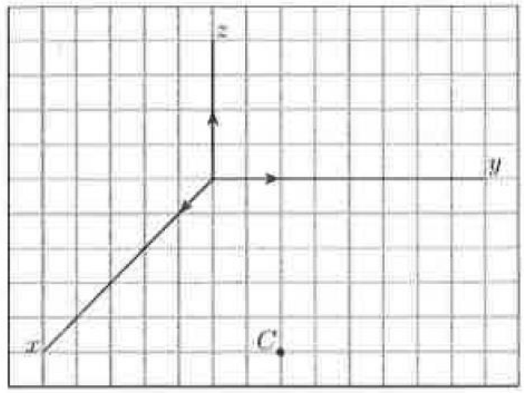
l'abscisse vaut 4



la cote vaut -2

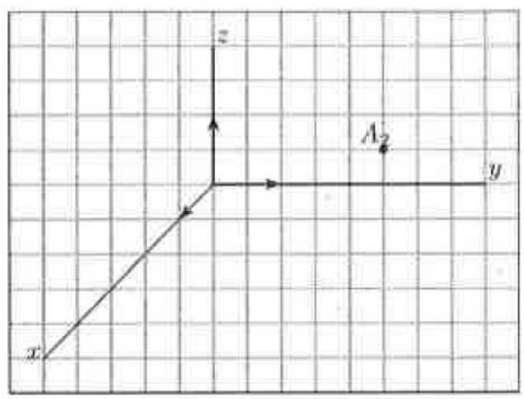


l'ordonnée vaut 2.5



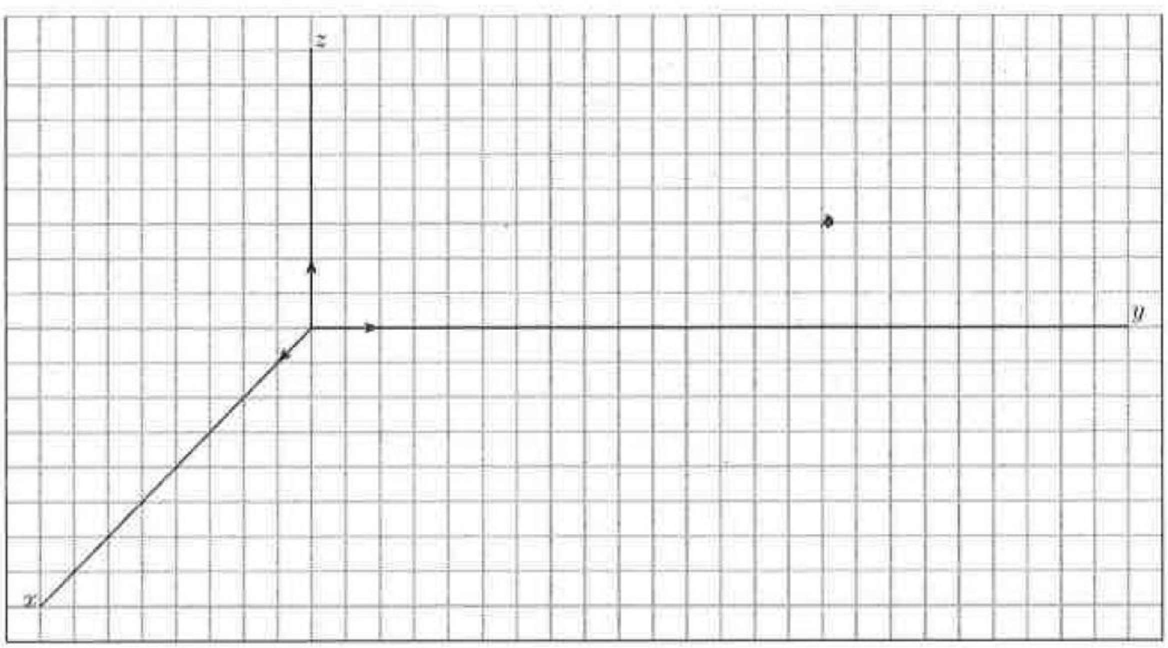
Exercice 5.6

Etant donné A_2 et sachant que l'abscisse A vaut -2, dessiner A et ses projections.



Exercice 5.7

Dessiner, ci-dessous, la droite passant par les points $A\,(6;3;4)$ et $B\,(4;6;2)$.
Indiquer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
Déterminer des équations paramétriques de cette droite



Exercice 5.8

On donne une droite d par deux de ses traces.

a. Dessiner la droite d et ses projections sur les plans de référence.

b. Donner un vecteur directeur de d

c. Discuter la position de d en s'aidant des plans de référence.

Faire l'exercice avec les droites :

d_1 : $\mathrm{T}_1\,(3;6;0)$ et $\mathrm{T}_2\,(0;6;5)$ $\qquad$ d_2 : $\mathrm{T}_2\,(0;5;4)$ et $\mathrm{T}_3\,(3;0;4)$ $\qquad$ d_3 : $\mathrm{T}_1\,(3;5;0)$ et $\mathrm{T}_3\,(3;0;6)$

Exercice 5.9

On se donne une droite d par sa trace $T_1\,(3;1;0)$ dans le sol et sa trace $T_2\,(0;5;4)$ dans le mur.

a. dessiner la droite d ainsi que ses projections dans le sol, le mur et la paroi.

b. par construction graphique, dessiner et indiquer les coordonnées de T_3.

c. trouver des équations paramétriques de d. Vérifier le résultat obtenu en b. par calcul.

Exercice 5.10

On se donne deux points A et B par leurs coordonnées.

a. Dessiner A, A_1 et B, B_1, leurs projections dans le sol.

b. Dessiner la droite d passant par A et B et ses projections.

c. Construire T_1, T_2 et T_3.

d. Trouver des équations paramétriques de la projection de d dans le sol et calculer les coordonnées de T_1, T_2 et T_3.

Faire l'exercice avec les droites :

$a : A\,(5;1;5)$ et $B\,(2;4;3)$ $\qquad$ $c : A\,(1;3;3)$ et $B\,(2;2;3)$

$b : A\,(6;10;5)$ et $B\,(3;4;2)$ $\qquad$ $d : A\,(1;4;2)$ et $B\,(3;4;2)$

Exercice 5.11

On donne une droite d par ses projections dans le sol et le mur :
d' passe par $A(5\,;0\,;0)$ et $B(0\,;6,5\,;0)$, d'' passe par $C(0\,;0\,;4)$ et $D(0\,;4\,;0)$.

a. Trouver par dessin ses traces dans les plans de référence.

b. Dessiner la partie visible de la droite d.

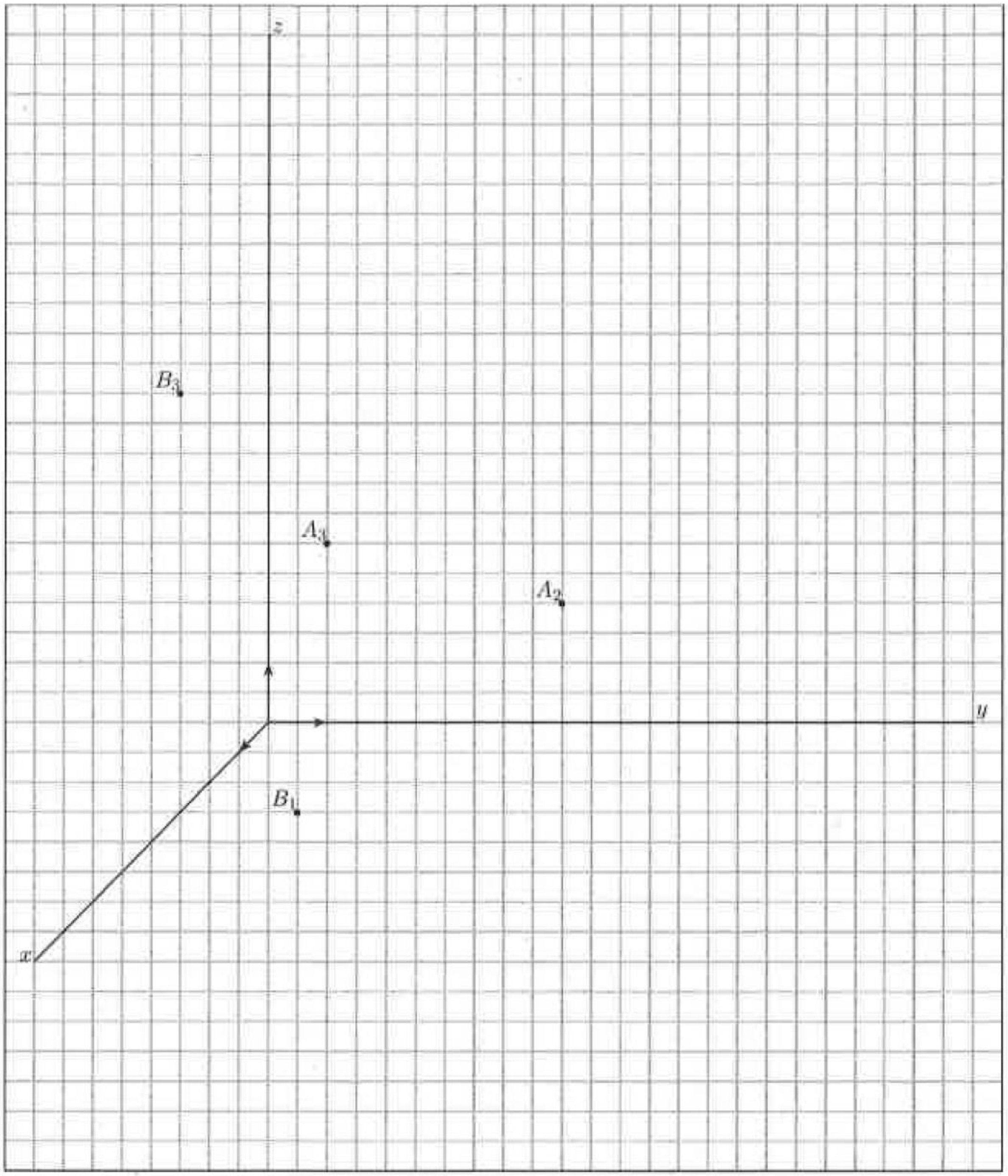
c. Déterminer par dessin si le point $E(3;\frac{13}{5};1) \in d$.

Exercice 5.12

Trouver des équations paramétriques de la droite horizontale qui passe par le point $A(3\,;-1\,;2)$ et dont la trace dans le mur a l'ordonnée 4.

Exercice 5.13

Construire A_1, B_2, A et B. Dessiner la droite d passant par A et B et ses projections.
Construire les deux points de d suivants : C d'ordonnée 3 et D de cote 1.



Exercice 5.14

On donne deux droites d_1 et d_2 par deux points.
Déterminer géométriquement la position relative de ces deux droites :

a. $d_1 : A(1\,;2\,;3)$ et $B(2\,;4\,;6)$ $\qquad$ $d_2 : C(2\,;1\,;-1)$ et $D(0\,;3\,;7)$

b. $d_1 : A(2\,;2\,;3)$ et $B(1\,;3\,;5)$ $\qquad$ $d_2 : C(1\,;4\,;2)$ et $D(3\,;2\,;-2)$

Exercice 5.15

On donne deux droites d_1 et d_2 par un point et un vecteur directeur. Déterminer par calcul la position relative de ces deux droites :

a. d_1 : $A(6\,;3\,;0)$ et $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad d_2$: $B(0\,;0\,;4)$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

b. d_1 : $A(-3\,;-1\,;2)$ et $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad d_2$: $B(4\,;-1\,;0)$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$

c. d_1 : $A(1\,;4\,;1)$ et $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad d_2$: $B(5\,;-1\,;0)$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$

d. d_1 : $A(2\,;-1\,;-4)$ et $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\quad d_2$: $B(4\,;0\,;-5)$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Exercice 5.16

Deux droites d_1 et d_2 sont données par un point et un vecteur directeur. Déterminer la valeur du paramètre p de sorte que les deux droites soient sécantes :

$$d_1 : A\,(1;1;1) \text{ et } \vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad d_2 : B\,(1;4;3) \text{ et } \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\3\\p\end{pmatrix}$$

Exercice 5.17

Soit le plan π donné par un point et deux vecteurs directeurs : $A\,(1;2;2)$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. Dessiner les traces du plan π dans le mur, la paroi et le sol.

Exercice 5.18

Soit le plan π passant par $A\,(4;\,-8;\,4)$, $B\,(0;\,1;\,1)$ et $C\,(-2;\,4{,}5;\,0)$.

a. Déterminer des équations paramétriques et une équation cartésienne de π.

b. Le point $D\,(5;\,-2;\,0{,}5)$ appartient-il au plan ?

c. Que doit valoir k pour que le point $E\,(8;\,k;\,-1)$ appartienne au plan ?

d. Calculer ses intersections avec les axes.

e. Le dessiner avec soin.

Exercice 5.19

Les plans ci-dessous sont donnés par 3 points ou une équation cartésienne. Déterminer des équations paramétriques et une équation cartésienne pour chacun d'eux. Calculer ensuite les points d'intersection de ces plans avec les axes de coordonnées. Finalement dessiner soigneusement ces plans.

a. $A(6;\,0;\,0)$, $B(0;\,4;\,0)$ et $C(0;\,0;\,3)$

b. $A(2;\,3;\,5)$, $B(1;\,0;\,5)$ et $C(6;\,-2;\,5)$

c. $A(2;\,1;\,3)$, $B(5;\,-1;\,6)$ et $C(1;\,4;\,2)$

d. $A(5;\,0;\,0)$, $B(0;\,1;\,1)$ et $C(4;\,2;\,2)$

e. $2x-3y+4z-12=0$

Exercice 5.20

Une droite d est donnée par un point et un vecteur directeur : $A\,(2;3;3)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

On appelle p la droite parallèle à d passant par $B(4\,;4\,;0)$.

a. Dessiner les droites d et p ainsi que leurs projections dans le sol

b. Dessiner les traces et donner l'équation cartésienne du plan vertical π contenant d.

c. Dessiner les traces et donner l'équation cartésienne du plan σ contenant d et p.

Exercice 5.21

On considère deux plans α et β. Dessiner les traces de ces deux plans ainsi que la droite i d'intersection. Trouver ensuite des équations paramétriques de la droite i.

a. $\alpha : -2x + 4y + z - 6 = 0$ $\quad\quad$ $\beta : 5x + 4y + 5z - 20 = 0$

b. $\alpha : 3x + 4y + 2z - 12 = 0$ $\quad\quad$ $\beta : 4x + 2y + z - 8 = 0$

c. $\alpha : x + 2y + 3z - 6 = 0$ $\quad\quad$ $\beta : x + 3z - 4 = 0$

Exercice 5.22

Le plan π contient les points $A(3;5;1)$, $B(6;1;3)$ et $C(4;2;0)$. La droite d passe par $D(4;6;0)$ et $E(1;5;3)$. Par dessin, déterminer leur position relative. Vérifier le résultat obtenu par calcul.

Exercice 5.23

Dans chaque cas, étudier la position relative de la droite d et du plan π.

a. $d : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\quad\quad$ $\pi : A(6\,;-1\,;1)\,,\, B(2\,;0\,;2)\,,\, C(-2\,;4\,;0)$

b. $d : A(3\,;1\,;2)\,,\, B(-1\,;2\,;0)$ $\quad\quad$ $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$

c. $d : \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\pi : \begin{cases} x = 1 - \mu + 2\tau \\ y = 1 + \mu - \tau \\ z = -3 - 2\mu - \tau \end{cases}$

Exercice 5.24

a. Dans chaque cas, étudier la position relative des plans π et τ.

   a) $\tau : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$

   b) $\tau : -3x - 6y + 3z - 9 = 0$ $\quad\quad$ $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$

b. Trouver l'équation cartésienne d'un plan σ parallèle à $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$ et passant par $A(2;4;3)$

Exercice 5.25

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ des vecteurs. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\vec{a} \bullet \vec{b},\ \vec{b} \bullet \vec{a},\ \vec{a} \bullet \vec{c},\ \vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \text{ et } (\vec{c} - \vec{a}) \bullet \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

Exercice 5.26

On donne deux points $A\,(-4\,;7;13)$ et $B\,(8,2\,;0,7\,;-9)$.

a. Calculer la longueur des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ainsi que la distance de A à B.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$.

c. Donner un vecteur unité parallèle à $\overrightarrow{OA}$.

d. Déterminer la longueur de la projection de $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ sur $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et celle de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

e. Déterminer l'angle au sommet O du triangle OAB ($\measuredangle AOB$) et au sommet A ($\measuredangle OAB$).

f. Calculer l'aire du triangle OAB.

Exercice 5.27

a. Trouver la valeur de k de sorte que $\begin{pmatrix} -3 \\ 2+k \\ -0.5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -6k \\ 5 \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

b. Trouver la valeur de a et b pour que $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit orthogonal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.28

a. Déterminer m pour que l'angle entre $\vec{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ soit de 60°.

b. Déterminer n pour qu'il y ait un angle de 45° entre $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.29

Soit la droite d passant par $A\,(2\,;6\,;0)$ et $B\,(-1\,;2\,;5)$.

a. Déterminer les coordonnées des traces de d.

b. Quelle est la valeur de l'angle entre d et la paroi et d et le mur ?

Considérons le plan $\pi :\ x - 5y + 11 = 0$.

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre d et π ?

d. Quel est l'angle entre d et π ?

Exercice 5.30

Une droite d passant par $A(4; -1; -2)$ et $B(1; 3; -3)$. Un plan π contient le point A et coupe la droite d perpendiculairement en A.

a. Trouver l'équation cartésienne de π.

b. Donner deux vecteurs directeurs de π.

Exercice 5.31

a. Déterminer l'équation cartésienne du plan perpendiculaire à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ passant par le point $(\frac{16}{5}\,;9\,;-4)$.

b. Déterminer l'équation cartésienne du plan perpendiculaire à la droite $d : \begin{cases} x = 2 + 13\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 11 + 8\lambda \end{cases}$ passant par le point $(-21\,;17\,;82)$.

c. Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant $D\,(-2\,;4\,;5)$ et parallèle à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.32

Le plan π contient $A(5;0;4)$, $B(0;3;4)$ et $C(5;3;0)$ et d passe par $D(3;2;2)$ et $E(4;5;1)$.

a. Déterminer l'équation cartésienne de π et les intersections π_x, π_y et π_z entre π et les axes de coordonnées.

b. Déterminer des équations de la droite ainsi que ses traces.

c. Calculer la longueur des côtés, les angles et l'aire du triangle ABC.

d. Déterminer la position relative de la droite et du plan.

e. Calculer les angles suivants :
   - Angle aigu entre π et le mur.
   - Angle aigu entre π et d.
   - Angle aigu entre la droite d et le sol.

f. Déterminer les coordonnées de D' la projection orthogonale de D sur le plan π.

g. Déterminer les coordonnées de D'' le symétrique de D par rapport au plan π.

Exercice 5.33

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ des vecteurs. Calculer les produits cross : $\vec{a} \wedge \vec{b}$,$\vec{b} \wedge \vec{a}$, $\vec{a} \wedge \vec{c}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$

Exercice 5.34

On considère deux plans $\pi :\ 6x + 2y + 3z - 12 = 0$ et $\sigma :\ x + 2y - 2z - 4 = 0$.

a. Déterminer l'angle aigu entre ces deux plans.

b. L'intersection de ces deux plans est une droite i. En donner des équations paramétriques.

Exercice 5.35

Déterminer la distance entre $\pi :\ 3x - 6y + 22z - 66 = 0$ et les points $A\left(\frac{-1}{3}; -2; 2,5\right)$, $B(2; -8; 4)$ et $C(0,4; -2; 5,7)$.

Exercice 5.36

Soient $A(0;4;1)$ et $B(-3;1;7)$ deux points.

a. Déterminer les coordonnées du (des) point(s) de la droite passant par A et B dont la distance au plan $\pi :\ 7x - 4y + 4z + 11 = 0$ vaut 5.

b. Déterminer les coordonnées du point sur l'axe des x situé à même distance de A que de B. Que vaut cette distance ?

Exercice 5.37

a. Déterminer l'aire du parallélogramme $OABC$, avec $A(2; 3,5; -1)$ et $B(3; 8; -5)$.

b. Soient les point $A_1(1; 3; -2)$ et $B_1(-6; y; 12)$. Que doit valoir l'ordonnée de B_1 pour que l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OB_1}$ soit $\sqrt{5}$?

Exercice 5.38

Les intersections du plan π et des axes sont $\pi_x(3;0;0)$, $\pi_y(0;5;0)$ et $\pi_z(0;0;8)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan π.

b. Déterminer la distance de l'origine au plan π.

c. Déterminer le volume de la pyramide dont les sommets sont π_x, π_y, π_z et O.

Exercice 5.39

On donne une droite d par deux points : $A(2;2;-5)$ et $B(4;-1;-4)$. A quelle distance de d sont les points $C(1;1;1)$, $D(-6;-3;5)$ et $E(6;-4;-3)$

Exercice 5.40

On considère les trois points suivants : $A(3;0;1)$, $B(0;1;3)$ et $C(5;4;3)$.

a. Trouver les coordonnées de D de sorte que $ABCD$ soit un parallélogramme.

b. Calculer l'aire du parallélogramme et la distance de C à la droite AB.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan π contenant A, B et C.

d. Trouver une équation cartésienne du plan π' perpendiculaire à π contenant la droite AB.

e. Calculer la distance de C à π' et la comparer à celle de C à AB.

Exercice 5.41

Quelle est la distance entre $d_1 : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$ et la droite d_2 qui passe par $A(0;3;-7)$ et $B(-4;5;-15)$?

Exercice 5.42

On considère deux droites $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2m_1 \\ y = 2 - m_1 \\ z = 3 + 3m_1 \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 3m_2 \\ y = 1 + m_2 \\ z = -1 + 2m_2 \end{cases}$.

a. Déterminer, par calculs, leur position relative.

b. Trouver l'équation de leur perpendiculaire commune.

c. Quelle est la distance la plus courte entre d_1 et d_2 ?

d. Quelles sont les coordonnées du point de d_1 situé le plus proche de d_2 ?

Exercice 5.43

Ecrire l'équation des sphères suivantes :

a. Centre $(8;-2;7)$ et diamètre 12.

b. Plus petite sphère passant par $A(-1;11;25)$ et $B(5;9;-13)$.

c. Centrée en $(1;-7;-10)$ et tangente au sol.

d. Centre $(4;1;-5)$ et tangente au plan $\pi : x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Exercice 5.44

Les équations suivantes représentent-elles des sphères ? Si oui, donner leur centre et leur rayon, sinon justifier.

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 18z + 97 = 0$

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 3z - 5,75 = 0$

c. $3x^2 + y^2 + z^2 + 66x - 8y + 10z + 378 = 0$

d. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 28y - 48z + 204 = 0$

Exercice 5.45

Pour quelle(s) valeur(s) de z le point $P(2, 3, z)$ est-il intérieur à la sphère $(x-4)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 64$?

Exercice 5.46

a. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère σ ayant $\Omega(0; 4; 5)$ comme centre et qui passe par le point $A(-3; 4; 5)$.

b. On considère deux droites $d_1 : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}\mu \\ y = 7 - \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases}$. Déterminer la position relative de σ et des deux droites ci-dessus. Donner les coordonnées des possibles points d'intersection.

c. Soit la droite $d_3 : \begin{cases} x = 3 + k\tau \\ y = 7 - \tau \\ z = 2 + \tau \end{cases}$. Déterminer la (les) valeur(s) du paramètre k de sorte que d_3 soit tangente à σ.

Exercice 5.47

a. Trouver le centre Ω et le rayon ρ de la sphère : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 17z + 25 = 0$

b. Quelle est la position de cette sphère par rapport au plan $\pi : x + 2y + 2z + 8 = 0$ et par rapport au sol ?

c. Trouver des équations cartésiennes des plans π_1 et π_2 qui sont tangents à la sphère et parallèles à π.

d. Le plan $\pi' : x + 2y + 2z - 10 = 0$ coupe la sphère selon un cercle. Déterminer le centre C et le rayon r de ce cercle.

e. La droite vertical passant par $S(7; 4; 0)$ rencontre la sphère en A et B. Déterminer des équations cartésiennes des plans β_1 et β_2 tangent à la sphère en ces points.

Exercice 5.48

a. Soient les plans $\alpha : x + 2y - 8 = 0$ et $\beta : 2x - y - 1 = 0$

  a) Dessiner les traces de α et β.

  b) Calculer l'angle entre ces deux plans.

  c) Dessiner la droite i, droite d'intersection des plans α et β.

  d) Trouver des équations paramétriques de la droite i.

b. Une sphère Σ_1 a pour centre $\Omega_1(1; 1; 3)$ et est tangente au plan α.

  e) Ecrire l'équation de la sphère Σ_1.

f) Déterminer le point de contact entre Σ_1 et α.

g) Prouver que la droite i est tangente à la sphère Σ_1.

h) Calculer la distance de l'origine à la droite passant par $_1$ et $R(2;3;0)$.

i) Trouver l'aire du triangle $O\Omega_1 R$.

c. Soit la sphère Σ_2 de rayon $r = 6$ et de centre $\Omega_2(1;1;z)$, avec z un nombre réel. Sachant que Σ_1 et Σ_2 sont tangents et que Σ_1 est à l'intérieur de Σ_2, trouver les valeurs possible de z.

Exercice 5.49

a. Dessiner les traces du plan .α : $2x + y + 2z - 10 = 0$.

b. La droite horizontale h passe par $A(3;0;2)$ et est contenue dans le plan α.

   a) Dessiner cette droite ainsi que sa projection sur le sol.

   b) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de h .

c. La sphère s est centrée en $C(-2;0;7)$ et passe par A.

   a) Etablir l'équation de cette sphère

   b) Calculer les coordonnées du deuxième point d'intersection de la droite h et de la sphère.

d. La droite d est tangente à la sphère s en A et perpendiculaire à h . Trouver un vecteur directeur de d .

e. On considère le plan β : $2x + y + k = 0$.

   a) Trouver k sachant que le plan β contient la droite h.

   b) Dessiner les traces du plan β.

   c) De quel angle ϕ faut-il faire tourner le plan α autour de la droite h pour l'amener sur le plan β ?

f. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère s et du plan β.

Exercice 5.50

a. On considère les plans $\pi_1 : 5x + 5y - 4z - 20 = 0$ et $\pi_2 : x + y - 8 = 0$.

   a) Dessiner les traces des plans π_1 et π_2.

   b) On appelle t_1 la trace dans le sol du plan π_1 et t_2 la trace dans le sol du plan π_2. Calculer la plus courte distance entre les droites t_1 et t_2

   c) Calculer l'angle aigu entre les plans π_1 et π_2.

   d) Dessiner d , la droite d'intersection de ces deux plans.

   e) Donner une représentation paramétrique de la droite d .

b. On donne la sphère $s : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ et le plan $\pi_3 : x + 2y - 2z + 40 = 0$.

   f) Après avoir vérifié que le plan π_3 ne coupe pas la sphère, calculer la plus courte distance les séparant.

   g) $C\,(1\,;-6\,;5)$ est le centre du cercle d'intersection du plan π_4 et de la sphère. Déterminer le rayon de ce cercle ainsi qu'une équation cartésienne du plan π_4.

   h) On donne la droite $\begin{cases} x = 13 + 4l \\ y = 3 - 3l \\ z = 3 + 2l \end{cases}$. Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite t et de la sphère s. Conclusion ?

   i) Vérifier que le point $T\,(9\,;6\,;1)$ appartient à la sphère s .

   j) Rechercher un vecteur directeur de la droite t' perpendiculaire à t et tangente à s au point T .

Exercice 5.51

a. On considère le plan π d'équation $2x - y + 2z - 8 = 0$ ainsi que les points $A(3;2;2)$, $B(7;6;0)$ et $C(5;10;4)$, tous inclus dan le plan π.

   a) Dessiner les traces du plan π.

   b) Vérifier que le triangle ABC est isocèle et rectangle puis calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

b. La sphère s de centre $E(8;4;7)$ passe par le point A .

   c) Trouver une équation cartésienne de la sphère s et vérifier que cette sphère passe aussi par les points B et C .

   d) Trouver les coordonnées du centre F et le rayon du cercle d'intersection de s et π.

c. La droite t est incluse dans le plan π et tangente à la sphère s en C .

   e) Trouver des équations paramétriques de la droite t .

   f) Dessiner la droite t et ses traces dans le sol et le mur.

   g) Trouver des équations paramétriques de l'autre droite du plan π tangente à la sphère s et parallèle à t .

d. On donne la droite $d : \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ incluse dans le sol.

   h) Calculer les coordonnées des points d'intersection G et H de d et de la sphère s .

   i) Dessiner d , G et H .

Exercice 5.52

Relativement à un repère métrique, on considère un cube d'arête $a = 5$ dont les sommets sont $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(a;a;0)$, $C(0;a;0)$, $D(0;0;a)$, $E(a;0;a)$, $F(a;a;a)$ et $G(0;a;a)$.

a. Calculer la longueur et l'angle des deux diagonales AG et EG

b. Calculer l'angle en O du triangle DOF et l'angle en A du triangle ADF.

c. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux (à angle droit). Donner les composantes d'un vecteur non nul $\vec{v}$ qui soit orthogonal à $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DF}$.

d. Trouver les coordonnées d'un point H de l'axe des z tel que l'angle entre $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HC}$ soit de 45^o exactement.

Exercice 5.53

Soient la droite $d : \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{cases}$ et la sphère S de centre $(4;7,5)$ et de rayon 5. On appelle "cercle de la sphère" l'intersection d'un plan et de la sphère. Un cercle de la sphère est centré sur d et son rayon vaut 4.

a. Déterminer les coordonnées du centre du cercle

b. Déterminer l'équation des plans dont l'intersection avec S a généré ce cercle.

Exercice 5.54

Trouver les équations des sphères centrées sur la droite d et tangentes aux deux plans π_1 et π_2 .

$$d : \begin{cases} x = 1 + m \\ y = -2m \\ z = 5 + m \end{cases} \qquad \pi_1 : 3x + 4y - 12 = 0 \qquad \pi_2 : 3y - 4z + 6 = 0$$

Exercice 5.55

a. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

b. Pour quelle(s) valeur(s) de k le déterminant $\begin{vmatrix} k & 3 \\ k-2 & -k \end{vmatrix}$ vaut-il zéro ?

c. Calculer $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Exercice 5.56

Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est-il tel que $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$. Que peut-on dire alors de la position de ces trois vecteurs ?

Exercice 5.57

Déterminer le volume du tétraèdre de sommets $A(2; -1; 1)$,$B(5; 5; 4)$,$C(3; 2; -1)$ et $D(4; 1; 3)$.

Exercice 5.58

Soient les points $A(2; 1; -1)$,$B(3; 0; 1)$ et $C(2; -1; 3)$. Déterminer les coordonnées du point D de l'axe O_y telles que le volume du tétraèdre $ABCD$ soit 5.

Exercice 5.59

Utiliser la règle de Cramer pour résoudre les systèmes suivants :

$A : \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 18 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 21 \end{cases}$, $B : \begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$, $C : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 5y - 3z = 3 \\ 5x + 12y - 8z = 9 \end{cases}$ et $D : \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 5x - 9y + 14z = 3 \end{cases}$

Exercice 5.60

Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$

Distinguer les solutions selon la valeur du paramètre λ.

Solution 5.1 $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -3.6 \\ 9.6 \\ -6 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \\ -15 \end{pmatrix}$

Solution 5.2

a. a) Vecteurs indépendants. Ils forment une base de V_3

b) Vecteurs dépendants. Ils ne forment pas une base de V_3

b. $z = 0$

c. $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{17}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 16 \\ -32 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1.4 \\ 2.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

Solution 5.3

A	$(1;-2;5)$	$\left(-5;\frac{1}{2};6\right)$	$(4;-5;-13)$	$(0;-1;6)$	$\left(4;-4.5;\frac{1}{4}\right)$
B	$(5;1;4)$	$\left(4;1;\frac{1}{3}\right)$	$(6;2;-4)$	$(-2.5;3;5)$	$\left(4;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
$\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Solution 5.4

a. $E(6;0;4)$

b. $F(6;6;4)$

c. $G(2;6;4)$

d. $M_{EF}(6;3;4)$

e. $M_{CD}(1;3;2)$

f. $DEFG$ est un rectangle, $M_{DEFG}(4;3;4)$

g. $BCGF$ est un parallélogramme, $M_{BCGF}(3;6;2)$

Solution 5.5 a. $A(4;-0.5;1)$ b. $B(-3;2.5;-2)$ c. $C(3;2.5;-1)$

Solution 5.6 $A(-2;2.5;0.5)$

Solution 5.7

$\vec{d} // \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$d : \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$$

Solution 5.8

a. $\vec{d_1} = \overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, d_1 est parallèle à la paroi.

b. $\vec{d_2} = \overrightarrow{T_2T_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, d_2 est parallèle au sol.

c. $\vec{d_3} = \overrightarrow{T_1T_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, d_3 est parallèle au mur.

Solution 5.9

$\overrightarrow{0T_3} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$d : \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Solution 5.10

a. $a_s : \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $T_1(-2.5; 8.5; 0)$, $T_2(0; 6; \frac{5}{3})$ et $T_3(6; 0; \frac{17}{3})$.

b. $b_s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $T_1(1; 0; 0)$, $T_2(0; -2; -1)$ et $T_3(1; 0; 0)$.

c. $c_s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, T_1 n'existe pas, $T_2(0; 4; 3)$ et $T_3(4; 0; 3)$.

d. $d_s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, T_1 n'existe pas, $T_2(0; 4; 2)$ et T_3 n'existe pas.

Solution 5.11 $E(3; \frac{13}{5}; 1) \notin d$

Solution 5.12

$d : \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 2 \end{cases}$

Solution 5.14

a. droites sécantes

b. droites parallèles

Solution 5.15

a. droites gauches

b. droites parallèles

c. droites sécantes, $I(3; 4; 2)$

d. droites confondues

Solution 5.16 $p = 4.5$

Solution 5.18

a. $\pi : \begin{cases} x = -4\lambda - 6\mu \\ y = 1 + 9\lambda + 12.5\mu \\ z = 1 - 3\lambda - 4\mu \end{cases}$, $\pi : 3x + 4y + 8z - 12 = 0$

b. $D \notin \pi$

c. $k = -1$

d. $\pi_x(4; 0; 0)$, $\pi_y(0; 3; 0)$ et $\pi_z(0; 0; \frac{3}{2})$.

Solution 5.19

a. $\pi_1 : \begin{cases} x = 6 - 3\lambda - 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = \mu \end{cases}$, $\pi_1 : 2x + 3y + 4z - 12 = 0$

b. $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 4\mu \\ y = 3 + 3\lambda - 5\mu \\ z = 5 \end{cases}$, $\pi_2 : z - 5 = 0$

c. $\pi_3 : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$, $\pi_3 : x - z + 1 = 0$

d. $\pi_4 : \begin{cases} x = 5 - 5\lambda - \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$, $\pi_4 : y - z = 0$

e. $\pi_5 : \begin{cases} x = 6 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = \mu \end{cases}$, $\pi_5 : 2x - 3y + 4z - 12 = 0$

Solution 5.20 b. $\pi :\ x + y - 5 = 0$ c. $\sigma :\ 7x + 4y + 6z - 44 = 0$

Solution 5.21 a. $i : \begin{cases} x = 2 - 16\lambda \\ y = \frac{5}{2} - 15\lambda \\ z = 28\lambda \end{cases}$ b. $i : \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{12}{5} - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ c. $i : \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

Solution 5.22 La droite et le plan sont sécants. Intersection $I(2.8; 5.6; 1.2)$

Solution 5.23 a. Sécants, $I(1; \frac{3}{2}; 1)$ b. la droite est contenue dans le plan. c. la droite est parallèle au plan.

Solution 5.25 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 61 = \vec{b} \bullet \vec{a}$
$\vec{a} \bullet \vec{c} = 0$
$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = 61$
$(\vec{c} - \vec{a}) \bullet (\vec{b} - \vec{a}) = 66$

Solution 5.26

a. $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{234}$, $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{148.73}$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{672.53}$

b. $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = -144.9$

c. $\overrightarrow{U_{OA}} = \frac{1}{\sqrt{234}}\overrightarrow{OA}$

d. $\left\|\vec{b}\right\| \simeq 9.47$ et $\left\|\vec{a}\right\| \simeq 11.88$

e. $\alpha = 140,96°$ et $\beta = 17,23°$

f. Aire=58.75

Solution 5.27 a. $k_1 \simeq -1.29$ et $k_2 \simeq -0.71$ b. $a = 4$ et $b = -5$

Solution 5.28 a. $m_1 \simeq -15.714$ et $m_2 \simeq 0.655$ b. aucune solution

Solution 5.29

a. $T_s(2; 6; 0)$,$T_m(0; \frac{10}{3}; \frac{10}{3})$ et $T_p(-2.5; 0; 7.5)$

b. $\alpha_{mur} \simeq 25,10°$ et $\alpha_{paroi} \simeq 34,45°$

c. $I(-1; 2; 5)$

d. $\alpha \simeq 28,13°$

Solution 5.30 a. $\pi : -3x + 4y - z + 14 = 0$ b. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Solution 5.31

a. $\pi_1 : x - 3y + 6z + 47.8 = 0$

b. $\pi_2 : 13x - 2y + 8z - 349 = 0$

c. $\pi_3 : 7x - 15y - 11z + 129 = 0$

Solution 5.32

a. $\pi : 12x + 20y + 15z - 120 = 0$, $\pi_x(10;0;0)$, $\pi_y(0;6;0)$ et $\pi_z(0;0;8)$

b. $d : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

$S(5;8;0)$, $M(0;-7;5)$ et $P(\frac{7}{3};0;\frac{8}{3})$

c. $a = \sqrt{41}$, $b = 5$, $c = \sqrt{34}$, $\alpha \simeq 72,02°$, $\beta \simeq 47,96°$, $\gamma \simeq 60,02°$ et aire$\simeq 13.87$

d. Sécants, intersection $I(3.25;2.74;1.75)$

e. $\alpha_{mur} \simeq 64,36°$, $\alpha_d \simeq 38,3°$ et $\alpha_{sol} \simeq 17,55°$.

f. $D'(\frac{2475}{769};\frac{1818}{769};\frac{1748}{769})$

g. $\overrightarrow{OD''} = \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DD'} = \cdots \simeq \begin{pmatrix} 3.44 \\ 2.73 \\ 2.55 \end{pmatrix}$

Solution 5.33 $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Solution 5.34

a. $\phi \simeq 79,02°$

b. $i : \begin{cases} x = 1.6 - 2\lambda \\ y = 1.2 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Solution 5.35 $\text{dist}(A;\pi) = 0$ $A \in \pi$, $\text{dist}(B;\pi) = \frac{76}{23}$, $\text{dist}(C;\pi) = 3.16$

Solution 5.36

a. $P_1(-9.2;-5.2;19.4)$ et $P_2(8.8;12.8;-16.6)$

b. $P(-7;0;0)$ et $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{66}$

Solution 5.37

a. Aire$\simeq 13,019$

b. -17 et -19

Solution 5.38

a. $\pi : 40x + 24y + 15z - 120 = 0$

b. $\text{dist}(O;\pi) = \frac{120}{49} \simeq 2.45$

c. $V = 20$

Solution 5.39 $\text{dist}(d;C) = \frac{\sqrt{483}}{\sqrt{14}} \simeq 5.87$

$\text{dist}(d;D) = \frac{\sqrt{2565}}{\sqrt{14}} \simeq 13.54$

$\text{dist}(d;E) = \frac{0}{\sqrt{14}} = 0$ $E \in d$

Solution 5.40

a. $D(8;3;1)$

b. Aire$= \sqrt{332}$ et $\text{dist}(C, d_{AB}) \simeq 4,87$

c. $\pi : 3x - 5y + 7z - 16 = 0$

d. $\pi' : 17x + 27y + 12z - 63 = 0$

e. $\text{dist}(\pi', C) = \text{dist}(C, d_{AB}) \simeq 4,87$

Solution 5.41 0.53

Solution 5.42

a. droites gauches

b. $d : \begin{cases} x = -2.8 - \lambda \\ y = -\frac{14}{15} + \lambda \\ z = -\frac{73}{15} + \lambda \end{cases}$

c. 4.04

d. $(-\frac{11}{15};\frac{43}{15};0.4)$

Solution 5.43

a. $(x-8)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = 36$

b. $(x-2)^2 + (y-10)^2 + (z-6)^2 = 371$

c. $(x-1)^2 + (y+7)^2 + (z+10)^2 = 100$

d. $(x - -4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}$

Solution 5.44

a. $r^2 < 0$ pas une sphère

b. sphère centre $C(0;1;-1.5)$ et rayon $r = 3$

c. pas une sphère

d. sphère centre $C(3;-7;12)$ et rayon $r = 10$

Solution 5.45 $z \in]-8,14;6,14[$

Solution 5.46

a. $x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9$

b. Pour d_1 : $I_1(-3;4;5)$ et $I_2(1;6;3)$. La sphère et d_2 sont disjoints.

c. $k_1 = 0$ et $k_2 = -4$

Solution 5.47

a. centre $\Omega(3;4;8.5)$ et rayon $\rho = 8.5$

b. $\text{dist}(C,\pi) > r \Rightarrow$disjoints
$\text{dist}(C,\text{sol}) = \text{r} \Rightarrow$tangents

c. $\pi_1 : x + 2y + 2z - 2.5 = 0$ et $\pi_2 : x + 2y + 2z - 53.5 = 0$

d. centre $C(1;0;4.5)$ et rayon $r = \frac{\sqrt{145}}{2}$

e. $\beta_1 : 4x + 7.5z - 148 = 0$ et $\beta_2 : 8x - 15z - 41 = 0$

Solution 5.52

a. $\alpha \simeq 35,26°$,
$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \sqrt{3}a$ et $\left\|\overrightarrow{EG}\right\| = \sqrt{2}a$

b. $54,74°$ et $60°$

c. $\vec{v} = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{DF}$

d. $H(0;0;7.77)$

Solution 5.53

a. $C_1(3;5;7)$ et $C_2(3;5;3)$

b. $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$ et $\pi_2 : x + 2y + 2z - 19 = 0$

Solution 5.54

a. $x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = \frac{16}{25}$

b. $(x+\frac{8}{15})^2+(y-\frac{46}{15})^2+(z-\frac{52}{15})^2 = \frac{16}{225}$

Solution 5.55

a. -29

b. $k = \frac{3\pm\sqrt{33}}{-2}$

c. -70, 12 et 0.

Solution 5.56 $k = 2$

Solution 5.57 $V = 3$

Solution 5.58 $D_1(0;-7;0)$ et $D_2(0;8;0)$

Solution 5.59

a. $(60;36)$

b. $(-2;-5;2)$

c. infinité de solutions

d. aucune solution

Solution 5.60

a. Si $\lambda = 1$, infinité de solution

b. Si $\lambda = -2$, aucune solution

c. Si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1,-2\}$, $x = y = z = \frac{1}{\lambda+2}$