

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

a) $z^4 = 8 - 8\sqrt{3} \cdot i$

d) $z^6 + 1 = 0$

b) $z^2 + i(z - 1) + \frac{7}{4} = 2z$

e) $z^6 + 19z^3 - 216 = 0$

c) $z^4 = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$

f) $z^4 + (1 + i)z^2 + i = 0$

Exercice 2

a) Soit p un polynôme à coefficients réels : $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.

1) Pour $z \in \mathbb{C}$, vérifier que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$.

2) Dédire de 1) que si z est un zéro de $p(z)$, alors \bar{z} est aussi un zéro de $p(z)$.

b) Soit $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2$

1) Vérifier que $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ est un zéro de $p(z)$.

2) Trouver tous les zéros de $p(z)$.

3) Décomposer $p(z)$ en produit de deux polynômes à coefficients réels.

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42 = 0$ en montrant d'abord qu'elle admet une solution réelle.

Déterminer le module et l'argument des solutions.

Exercice 4

On donne la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par $z \mapsto w = f(z) = 2iz + 2$

- a) Prouver que f est la composition d'une rotation de centre O et d'angle α , d'une homothétie de centre O et de facteur k et encore d'une translation t . Trouver α , k et t .
- b) Quel est le point fixe de f ?
- c) Trouver les images de l'horizontale d'équation $y = 1$ et de la verticale d'équation $x = 2$.

Exercice 5

On donne la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par $z \mapsto f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

- a) Quelle est l'image de l'axe réel ?
- b) Quelle est l'image de l'axe imaginaire ?
- c) Quel est l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire ?
- d) Quels sont les points fixes de f ?
- e) Trouver l'expression de $f \circ f$.

Exercice 6

- a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 1 - 8i = 0$.
- b) On considère l'application $f : z \mapsto w = 2z - i$
 - 1) Donner le point invariant de f , puis décrire l'application f en termes géométriques.

2) On pose $z_0 = 1 - i$:

calculer $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2)$, $z_4 = f(z_3)$,

Trouver une expression pour z_n et démontrer la formule trouvée par récurrence.

Vérifier que dans le plan de Gauss, les nombres $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ sont situés sur une droite dont on donnera l'équation.

Exercice 7

On considère l'application $f : z \mapsto w = z^2 + z + 1$

- a) Déterminer les nombres complexes dont l'image est $w = 6 + 5i$.
- b) Soit deux nombres différents z_1 et z_2 qui ont la même image.
Que peut-on dire de leur somme $z_1 + z_2$?
- c) Où sont situés, dans le plan de Gauss, les nombres complexes z tels que $f(z)$ soit réel ?
- d) Vérifier que, dans le plan de Gauss, les nombres $1, 2 + i$ et $f(2 + i)$ sont alignés.

Exercice 8

- a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 + (-1 + 12i)z^2 + (-87 - 9i)z + 18 - 306i = 0$ sachant qu'elle admet une solution purement imaginaire yi .

- b) On considère la transformation $f : z \mapsto w = \frac{(-1 + i)z + (3 - i)\bar{z}}{2}$

1) Quels sont les points fixes de la transformation ?

2) On considère dans le plan de Gauss le triangle de sommets

$z_1 = -6i$, $z_2 = 7 - 3i$ et $z_3 = -6 - 3i$.

Déterminer le triangle dont les sommets sont $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$.

Dessiner les deux triangles.

- 3) Quel que soit z , montrer que $f(z) - z$ est un multiple réel de $f(z_1) - z_1$.
4. Que représente géométriquement la transformation f ?

Exercice 9

a) On considère l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = a \cdot z$. Déterminer le nombre complexe a de sorte que $f\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$.

b) Dans le plan de Gauss on considère la similitude $g : z \mapsto w = a \cdot z$ où $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

1. Calculer le rapport d'homothétie et l'angle de rotation de la similitude g .
2. On pose $z_0 = 6$, $z_1 = g(z_0)$, $z_2 = g(z_1)$, \dots , $z_n = g(z_{n-1})$, \dots
Calculer z_1 , z_2 et z_9 puis trouver une expression pour z_n .
3. Montrer que le triangle de sommet O , z_0 , z_1 est rectangle en z_1 .
Expliquer pourquoi tout triangle O , z_{k-1} , z_k est rectangle en z_k .
4. En tirant profit de la question b)3 et en choisissant 1 cm comme unité, construire la ligne polygonale de sommets z_0 , z_1 , z_2 , \dots , z_9 .
5. Calculer la longueur du segment d'extrémités z_0 et z_1
Si on poursuivait indéfiniment la construction de la ligne polygonale de sommets z_0 , z_1 , z_2 , z_3 , \dots quelle serait la longueur de la "spirale" ainsi obtenue ?

Exercice 10

On considère l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto f(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i$

- a) Résoudre l'équation $f(z) = 9i$ et montrer que les 3 solutions sont sur une même droite du plan de Gauss.
- b) Calculer les 3 points fixes de f sachant que l'un d'eux est situé sur l'axe imaginaire. Vérifier que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- c) Montrer que l'axe imaginaire est une figure globalement invariante par f .
- d) Trouver les points de l'axe réel dont les images sont sur l'axe imaginaire.
- e) Calculer les parties réelle et imaginaire de l'image de $z = x + i$.
En déduire l'image de la droite d'équation $y = 1$.