Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Exercices de révision
Mathématiques niveau 2

ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1

a) Interpréter géométriquement l'application linéaire de V_3 dans V_3 donnée dans une base orthonormée par $f: \vec{v} \to \vec{w} = 2(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{v}$ où $\vec{u}$ est un vecteur-unité donné.
Indication : trouver l'image de $\vec{u}$ et d'un vecteur quelconque orthogonal à $\vec{u}$.

b) Trouver la matrice B associée à f pour $\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Soit la matrice $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application linéaire de matrice C.
Donner une interprétation géométrique de cette application linéaire.

d) On considère l'application linéaire de matrice $M = C \cdot B$.
Donner une interprétation géométrique de cette application linéaire.

Exercice 2

a) Dans une base orthonormée directe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ on considère l'application $f: \vec{v} \to f(\vec{v}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ de V_3 dans V_3 où $\vec{u}$ est un vecteur-unité fixe.

1) Montrer que f est linéaire (justification détaillée).

2) Montrer que f est symétrique (justification détaillée).

b) On envisage l'application linéaire g de V_3 dans V_3 donnée dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ par la matrice $G = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de g.
2) Lorsque $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{u}_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{u}_2$, choisir trois vecteurs propres indépendants de g et chercher leurs images par l'application f.

3) Comparer g et f.

Exercice 3

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f dans une base donnée

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b) Déterminer la matrice M de f dans une base de vecteurs propres, puis calculer M^n.

c) Déterminer l'expression de A^n.

Exercice 4

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice
$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

b) Montrer que chaque vecteur propre de C est orthogonal à deux vecteurs propres indépendants de la matrice transposée de C.

On considère maintenant l'affinité de matrice C qui laisse fixe l'origine.

c) Dessiner l'image par l'affinité du cube construit sur les vecteurs de base $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

d) Quelle est l'image du plan π d'équation $x+y+z=1$ par cette affinité ?

Exercice 5

Dans un repère métrique $(O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$, on considère le plan π normal à $\vec{n}=\vec{u}_1-2\vec{u}_2+2\vec{u}_3$ passant par O et la droite d parallèle à $\vec{n}$ et passant également par O.

a) Écrire l'équation de π, puis calculer la distance de π à $E_1(1;0;0)$.

b) On envisage l'application linéaire f_1 qui associe à $\overrightarrow{OP}$ son symétrique $\overrightarrow{OP_1}$ par rapport à π. Trouver la matrice C_1 de f_1.

c) Trouver la matrice C_2 de l'application qui associe à $\overrightarrow{OP}$ sa projection orthogonale $\overrightarrow{OP_2}$ sur d.

d) Calculer $C_1^{\,2}$, $C_2^{\,2}$, et $I-2C_2$, I étant la matrice-unité.

e) Les résultats obtenus au point d) sont-ils inattendus ? Quels commentaires peut-on donner ?

Exercice 6

Dans une base orthonormée $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$, une application linéaire f est donnée par la matrice symétrique $A=\begin{pmatrix} a & b & \frac{36}{23} \\ b & c & \frac{6}{23} \\ \frac{36}{23} & \frac{6}{23} & \frac{28}{23} \end{pmatrix}$

a) Déterminer (en fonction de a, b et c) l'image de $\vec{v}_1=\vec{u}_1+2\vec{u}_3$ et de $\vec{v}_2=3\vec{u}_2+\vec{u}_3$ puis calculer a, b et c sachant que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres.

b) Soit $\vec{v}_3$ un vecteur orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Trouver son image par f.

c) Écrire la matrice B de f dans la base $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ et interpréter géométriquement la transformation f.

d) On pose $f^2=f\circ f$, $f^3=f\circ f^2$, $f^4=f\circ f^3$, etc.
Interpréter géométriquement f^n.

Exercice 7

Relativement à une base orthonormée de l'espace, on considère une application linéaire *f* donnée par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre et donner la valeur propre correspondante.

b) Soit *S* le sous-espace des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.
Choisir dans *S* deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{s}$ et $\vec{t}$.
Calculer leur image $f(\vec{s})$ et $f(\vec{t})$.
Montrer que *S* est globalement invariant par *f*.

c) On pose *a* = 2 et *b* = -1. Calculer $f(\vec{r})$, $f(\vec{s})$ et $f(\vec{t})$ dans ce cas particulier.
Donner la matrice *N* de *f* dans la base $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$.

d) Pour quelles valeurs non nulles de *a* et *b* la matrice *M* représente-t-elle une rotation ?
Préciser alors l'angle de la rotation.

Exercice 8

a) Dans le plan muni d'une origine et d'une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, on considère les applications linéaires *m* et *n* , données par leurs matrices

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de *M* puis interpréter *m* géométriquement.

2) Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de *N,* puis interpréter *n* géométriquement.

b) Dans l'espace muni d'une origine et d'une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on considère l'application linéaire r donnée par sa matrice

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de R puis interpréter r géométriquement.

2) Écrire les matrices R^2, R^3, R^4 et R^n.

Exercice 9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne une transformation linéaire f par sa matrice F :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a & 1 & -3 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad a \text{ étant une constante.}$$

a) On note λ un nombre et I la matrice de l'identité. Vérifier que le déterminant de la matrice $F - \lambda I$ peut s'écrire : $\text{dét}(F - \lambda I) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - a\lambda$

b) Trouver une base du sous-espace des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

c) Lorsque $a = -3$, calculer les valeurs propres de la transformation f.
Dans ce cas, en observant son effet sur une base propre, on peut interpréter f comme la composition d'une projection oblique sur un plan suivie d'une affinité axiale dans ce plan. Quels sont alors la direction de la projection et le rapport de l'affinité axiale ?

Pour la fin du problème, on pose $a = 1$.

d) Déterminer tous les vecteurs propres de la transformation f.

e) Calculer l'image par f de chacun des vecteurs ci-dessous

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exprimer ces images dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Dans cette base, quelle serait la matrice M de f ?

On considère maintenant l'affinité de matrice F qui laisse fixe l'origine.

f) Quelle est, par cette affinité, l'image de la droite horizontale d'équations $z=-1$ et $x=y$?

g) Quels sont les points de l'espace dont l'image est dans le plan d'équation $y-z=0$?

Exercice 10

a) Une affinité axiale est donnée par son axe a d'équation $3x+y+3=0$, sa direction $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et son rapport $r=-2$.

   1) Exprimer l'image $P'(x';y')$ d'un point $P(x;y)$ quelconque.

   2) Trouver l'équation de d', image de la droite d d'équation $x+5y-5=0$.

b) On envisage l'affinité donnée par

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y+1 \\ y'=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y-2 \end{cases}$$

   1) Étudier cette affinité et la décrire géométriquement.

   2) Déterminer l'image par cette affinité du cercle de centre $M(-4;10)$ et de rayon $r=2\sqrt{5}$.