Grandeurs, mesures... et problèmes

D'autres caractéristiques de notre Univers nécessitent d'être mesurées et le *Système International (SI)*, adopté en 1960, définit un ensemble de grandeurs et leur unité de mesure privilégiée. En plus du *mètre* et de la *seconde*, on a retenu : le *kilogramme* pour la mesure des masses ; le *kelvin* pour la température ; le *candela* pour la luminosité ; l'*ampère* pour l'intensité d'un courant électrique et la *mole* pour la quantité de matière d'un système.

Toutes les autres unités peuvent être composées à partir de ces sept unités de base et mesurent des grandeurs comme la vitesse (km/h), le débit (m^3/s), la masse volumique (kg/m^3), etc.

Existent enfin également le pixel et l'octet (ou byte), unités issues des technologies binaires. Les multiples de l'octet, comme le kilo octet (Ko), le méga octet (Mo), le giga octet (Go) ou le téra octet (To) traduisent, entre autres, les progrès opérés en matière de développement électronique, pour la capacité de stockage d'informations et la vitesse de travail de nos ordinateurs, lecteurs de musiques et autres téléphones portables.

Utilisée, entre autres, par les chimistes et les pharmaciens, la balance analytique *permet des mesures allant jusqu'au dixième de milligramme.*

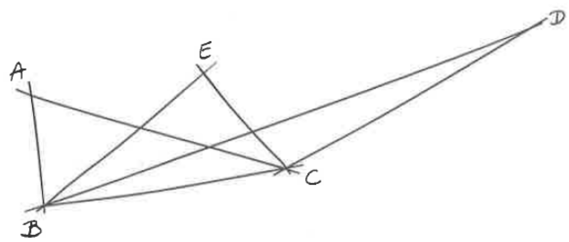
Un luxmètre, *utilisé par les photographes en particulier : capteur permettant de mesurer l'éclairement ; cette mesure s'exprime dans une unité appelée « lux », et non en candela.*

Placés le long des routes et des autoroutes et utilisés par la police, les radars tachymètres *permettent de mesurer la vitesse des véhicules avec une marge d'erreur de ± 3 %.*

GM172 Aire maximale

Les points A, E et D se trouvent sur une droite parallèle à BC.

Lequel des trois triangles ABC, BCE et CDB a la plus grande aire?



GM173 La plus grande aire

Construis un trapèze rectangle $ABCD$ tel que:

- $AD \,//\, BC$ et $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90°$;
- $AB = 6$ cm, $BC = 12$ cm et $AD = 8$ cm.

Place un point P sur le côté AB tel que $AP = 3{,}5$ cm.

Construis le point Q, milieu du segment PC.

Parmi les quatre triangles APD, PBC, DPQ et DQC, lequel a la plus grande aire?

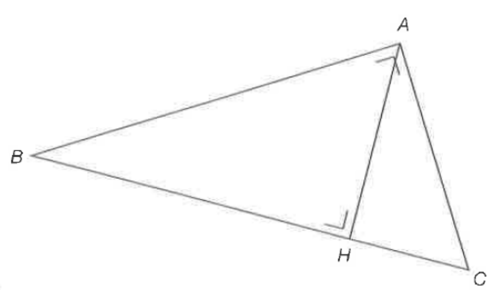
GM174 Les théorèmes métriques

A l'aide de cette figure et de la notion de similitude, essaie de prouver les théorèmes suivants.

Théorème de la hauteur: $AH^2 = BH \cdot CH$

Théorème d'Euclide: $AB^2 = BH \cdot BC$ et $AC^2 = CH \cdot BC$

Théorème de Pythagore: $BC^2 = AB^2 + AC^2$



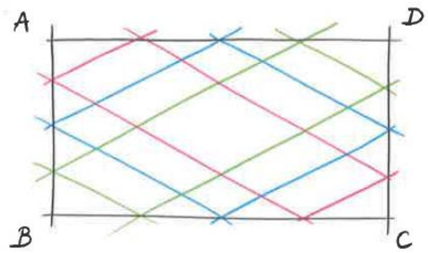
FICHIER GM175

GM176 Quadrillage

Sur ton cahier, construis un rectangle *ABCD* de 8 cm × 12 cm.

Sans effectuer de mesures, divise ses côtés en quatre parties isométriques.

Complète ta construction en traçant des quadrilatères comme sur ce croquis.



a) Compare les périmètres de chacun des quadrilatères.

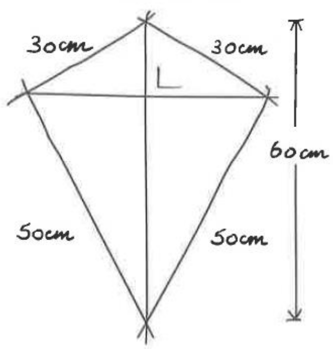
b) Compare leurs aires à celle du rectangle *ABCD*.

GM177 Cerfs-volants

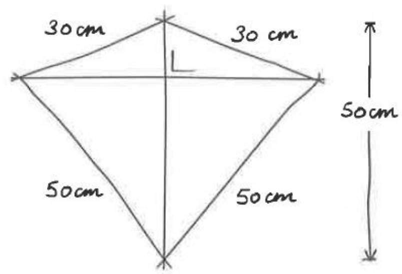
Luce et Martine ont fabriqué chacune un cerf-volant.

Détermine l'aire de la toile utilisée par chacune d'elles.

Cerf-volant de Luce

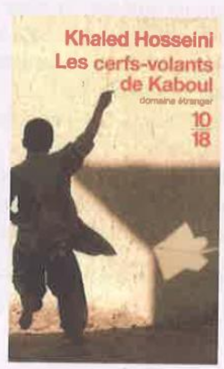


Cerf-volant de Martine



Jeu de plage et sport de plein air, le cerf-volant est aussi, dans de nombreux pays, un sport de combat. Le fil coupant en est la pratique la plus répandue : au Chili, au Pakistan, en Inde comme en Afghanistan, se déroulent de grands rassemblements où l'on peut voir des dizaines de cerfs-volants s'opposer. On utilise des cerfs-volants traditionnels en papier avec une structure en bambou ; le but du jeu est de faire tomber à terre les cerfs-volants des adversaires. La manière la plus courante est de parvenir à en couper le lien grâce au fait que le fil fin de coton ou de lin est enduit d'une matière composée de verre pilé ou de quartz.

Le célèbre roman (2003) de Khaled Hosseini (ci-contre), qui a inspiré un film sorti en 2007, raconte ces combats épiques dans le ciel de la capitale afghane.



GM178 Avec du papier A4

Plie une feuille de papier A4 de manière à superposer deux sommets qui appartiennent à la même diagonale.

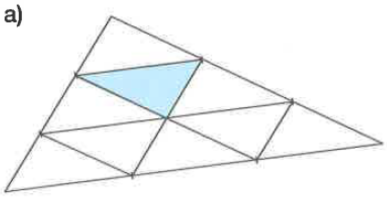
Quelle est l'aire du pentagone ainsi formé ?

GM179 Les triangles colorés

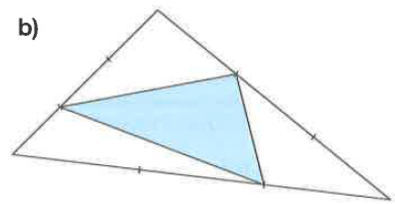
Chaque côté du grand triangle est partagé en trois parties isométriques.

Exprime l'aire des triangles colorés en fonction du grand triangle.

a)



b)



GM180 La quadrature du cercle

Trace un cercle de centre O et de diamètre AE.

Place un point C, dans le prolongement du diamètre AE, tel que $EC = \frac{1}{2}OE$.

Construis le carré $ABCD$.

Le carré $ABCD$ et le disque de centre O ont-ils la même aire ?

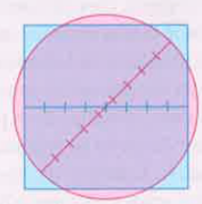
En mathématiques, la quadrature du cercle fait partie des trois grands problèmes de l'Antiquité, avec la trisection de l'angle et la duplication du cube.

Est-il possible de construire un carré qui a la même aire qu'un disque donné, en utilisant uniquement une règle et un compas ? A priori anodine, cette question a pourtant défié les mathématiciens pendant plus de trois mille ans.

Dans le papyrus Rhind, vers 1700 av. J.-C., le scribe Ahmès proposait une solution du problème.

Pour lui, la quadrature du cercle est possible : c'est le carré de côté 8d/9 où d est le diamètre du cercle. De rapides calculs démontrent pourtant qu'il a tort et qu'il s'agit là d'une solution approchée. Se rapprocher de la quadrature du cercle, c'est aussi se rapprocher de la valeur exacte de π.

De nombreux mathématiciens proposeront des méthodes approchées, et il fallut attendre 1882, année où le mathématicien allemand Lindemann démontra l'impossibilité de « quadraturer un cercle ».



Aujourd'hui, dans le langage courant, l'expression « c'est la quadrature du cercle » désigne une entreprise ou un problème insurmontable et impossible à réaliser.

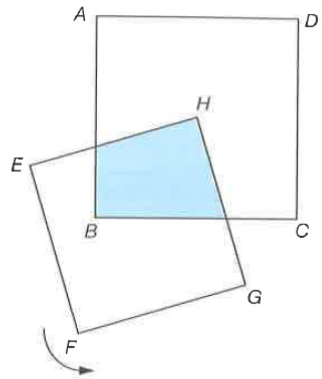
GM181 Le carré tournant

Dans cette figure :

ABCD est un carré fixe ;

EFGH est un carré mobile qui tourne autour du point *H*, centre du carré *ABCD*.

Quelle est l'aire du domaine coloré ?



GM182 Chutes

Tu découpes un hexagone régulier, le plus grand possible, dans un disque en carton de 20 cm de rayon.

a) Quelle est l'aire des chutes (parties perdues après le découpage) ?

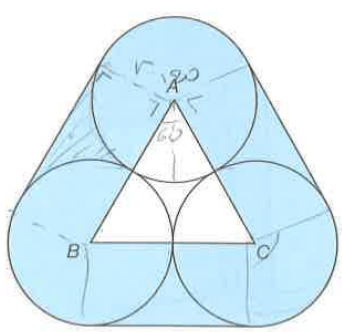
b) Quelle fraction du disque entier représentent ces chutes ?

c) Compare tes résultats avec ceux que tu obtiendrais en prenant un disque de 50 cm de rayon.

GM183 Histoire d'aires

A, *B* et *C* sont, respectivement, les centres des trois disques de la figure ci-dessous.

Calcule l'aire de la partie colorée, lorsque le côté du triangle équilatéral mesure 5 cm.



GM184 Tourner en rond

a) Si l'on pouvait tendre une ficelle autour de la Terre, le long de l'équateur et à 1 m de hauteur, de combien dépasserait-elle la longueur de l'équateur ?

b) Et si on tend une ficelle à 1 m de distance autour d'un ballon de football ?

GM185 Doublement inscrit

Dans un cercle de 3 cm de rayon, inscris un rectangle *ABCD* dont les milieux des côtés sont, respectivement, *I*, *J*, *K* et *L*.

Quel est le périmètre du polygone *IJKL* ?

GM186 Le troisième sommet

On connaît les coordonnées de deux sommets d'un triangle *ABC* :
$A\,(4 ; -3)$ et $B\,(-2 ; 5)$.

Trouve l'ordonnée du troisième sommet $C\,(-2 ; x)$, de telle façon que :

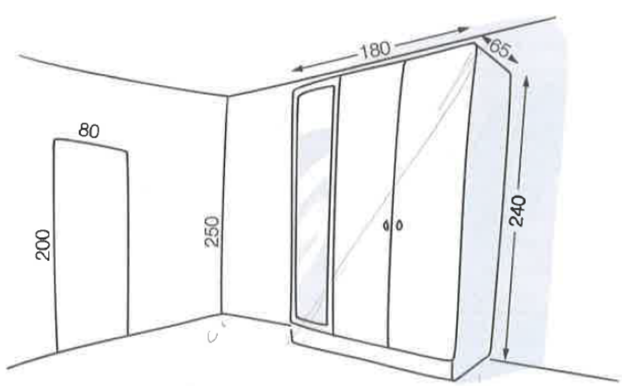
a) l'aire du triangle *ABC* soit égale à 24 ;

b) l'aire du triangle *ABC* soit égale à 48 ;

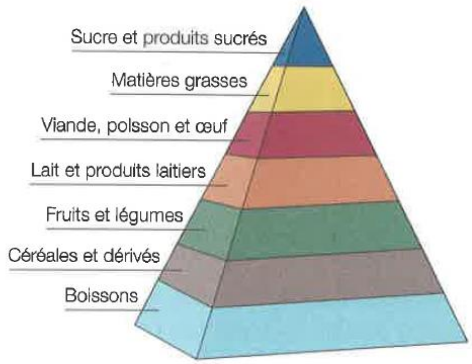
c) le périmètre du triangle *ABC* soit égal à 24.

GM187 Déménagement

Peut-on sortir cette armoire de la pièce, sans la démonter ?



GM188 La pyramide alimentaire



John veut construire une maquette de la pyramide ci-contre. Il fait les choix suivants :

- la pyramide sera régulière et aura une base carrée ;
- la diagonale du carré de base mesurera 8,5 cm ;
- la hauteur de la pyramide vaudra 9,5 cm.

a) Calcule le volume de cette maquette.

b) Dessine, en vraie grandeur, une face latérale de cette pyramide.

c) Quelle catégorie d'aliments devrait être la plus consommée ? La moins consommée ?

d) Pourquoi avoir choisi une pyramide pour cette représentation ?

Une pyramide alimentaire illustre une alimentation équilibrée, qui garantit un apport suffisant en énergie, ainsi qu'en substances nutritives et protectrices, et contribue de façon déterminante à assurer notre bien-être.

Les aliments mentionnés aux étages inférieurs de la pyramide sont à consommer en abondance, ceux des niveaux supérieurs en quantités moindres. Tous les aliments ont leur place dans la pyramide, car l'équilibre alimentaire ne nécessite aucun interdit. Une alimentation saine est le fruit d'une combinaison judicieusement proportionnée des différents aliments.

Suivant les régions et les habitudes alimentaires, ces pyramides peuvent légèrement varier ; celle représentée ci-contre est proposée par la Société suisse de nutrition.

GM189 Parc hexagonal

Un parc a la forme d'un hexagone régulier de 2 km de côté.

Cynthia part de l'un des sommets de l'hexagone et marche le long de ses côtés. Elle parcourt 5 km.

Quelle est la longueur du plus court chemin qui la sépare alors de son point de départ ?

GM190 Boules de billard

Trois boules de billard français sont emballées dans un tube cylindrique, comme dessiné ci-contre. Les boules se touchent et touchent les bords et les extrémités du carton.

Sachant que le tout a une masse de 787 g et que le carton seul pèse 160 g, calcule le volume du tube cylindrique. La masse volumique de la boule vaut 1,71 g/cm^3.